ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Балаев

МОМЕНТЫ МНОГОМЕРНОГО *t*-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ С ВЕКТОРОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ, ОДНОМЕРНЫЕ МАРГИНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Препринт WP2/2012/03
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Москва
2012

Редактор серии WP2
«Количественный анализ в экономике»
В.А. Бессонов

Балаев, А. И. Моменты многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы, одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функции : препринт WP2/2012/03 [Текст] / А. И. Балаев ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики».– М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2012. – 36 с. – 70 экз.

Рассматриваются теоретические свойства многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы. Выведена общая формула моментов и условия их существования, одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функции, а также предложен простой алгоритм симулирования. Полученные формулы проиллюстрированы примерами.

Классификация JEL: C14, C32.
Ключевые слова: многомерное *t*-распределение, вектор степеней свободы, моменты, маргинальные распределения, симулирование.

Совместный научный семинар кафедры математической экономики и эконометрики и лаборатории макроструктурного моделирования экономики России проведен 10 июля 2012 г.

Препринты Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

1. Введение

Многомерное t-распределение находит широкое применение в исследованиях, посвященных моделированию совместного распределения доходностей нескольких активов. Как известно, в одномерном случае использование t-распределения при моделировании шоков позволяет учитывать эмпирический факт о так называемых «тяжелых хвостах» распределения финансовых доходностей. В многомерном же случае при моделировании совместного распределения нескольких доходностей эмпирический факт о «тяжелых хвостах», которые в данном случае также становятся многомерными, можно учесть, применяя многомерное t-распределение.

Как правило, в эконометрической литературе в качестве многомерного t-распределения рассматривается распределение, параметр степеней свободы которого является числом, как и в одномерном случае (теория данного распределения подробно рассмотрена в [7]). Таким образом, различия в формах маргинальных распределений компонент случайного вектора возникают только в силу несовпадения дисперсий, поскольку параметр степеней свободы является общим для всех компонент вектора. В финансовых приложениях это означает, что скалярный параметр степеней свободы определяет некую общую для всех активов меру «толщины хвостов» распределения доходностей, а специфика формы распределений для различных активов определяется только дисперсиями доходностей. Поскольку на практике одномерные распределения доходностей активов различаются не только вторыми моментами, параметров дисперсий недостаточно для учета различий в формах распределений, и, следовательно, t-распределение со скалярным параметром степеней свободы является недостаточно гибким для практического применения и требует модификации.

В [3] предложено обобщение многомерного t-распределения со скалярным параметром степеней свободы на случай вектора степеней свободы (см. также [4], [5], [6]). Данное распределение дает больше гибкости для учета различий в распределениях доходностей активов, чем распределение со скалярным параметром степеней свободы, поскольку появляется возможность моделировать эксцесс распределения отдельно для каждой доходности. t-распределение с вектором степеней свободы является новым и его теоретические свойства еще недостаточно изучены. В настоящей работе доказаны некоторые теоремы, касающиеся базовых свойств данного распределения, а также рассмотрены примеры.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 приведено определение многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы и рассмотрена его стандартизованная форма. В разделе 3 для стандартизованной формы распределения выведены формула смешанного момента общего вида и условия его существования. В разделах 4 и 5 выведены одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функции. В разделе 6 рассмотрен пример трехмерного *t*-распределения с вектором степеней свободы с иллюстрацией маргинальных распределений и формулами моментов 1-го и 2-го порядков. Наконец, в разделе 7 предложен простой способ симулирования *t*-распределения с вектором степеней свободы.

2. Определение и стандартизованная форма

Будем следовать определению *t*-распределения с вектором степеней свободы, приведенному в [3]. Примем следующие обозначения.

Для матрицы $M = \{m_{ij}\},\ 1 \le i, j \le d$ и $k = 1,...,d$ обозначим подматрицы $M^{[k]} = \{m_{ij}\},\ 1 \le i, j \le k$ и $M_{[k]} = \{m_{ij}\},\ d-k+1 \le i, j \le d$.

Пусть $\mu \in \mathbf{R}^d$ и A – положительно определенная $d \times d$ матрица. Для вектора $a = (a_1,...,a_d)'$ предполагаем $a_j > \frac{j-1}{2},\ j = 1,...,d$. Также положим $a_0 = 0$ и $a_{d+1} = \frac{d+1}{2}$. Обозначим $b = (b_1,...,b_d)'$, такой что $b_j = a_j + \frac{1}{2},\ j = 1,...,d$. Пусть также $b_0 = 0$ и $b_{d+1} = \frac{d+1}{2}$.

Многомерная гамма-функция определяется следующим образом:

$$\Gamma_d^*(a) = \pi^{\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2}\right),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

Определение 1. Случайный вектор $X \in \mathbf{R}^d$ имеет многомерное *t*-распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ, a, A, если его функция плотности имеет вид

$$f_X(x) = C\left|A\right|^{-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2}(x-\mu)'^{[d-j]} \left(A^{[d-j]} \right)^{-1} (x-\mu)^{[d-j]} \right)^{b_j - b_{j+1}},$$

где

$$C = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)}. \tag{1}$$

Приведем данное распределение к стандартизованной форме. Положим $Z = P^{-1}(X-\mu)$, где $d \times d$ матрица P – нижняя треугольная и $A = PP'$. В [6] показано, что $Z = (Z_1, Z_2, ..., Z_d)'$ имеет *t*-распределение с вектором степеней свободы с параметрами $\mu = 0$ и $A = I_d$, то есть имеет функцию плотности

$$f_Z(z) = C \prod_{j=0}^{d-1} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} z_2^2 + ... + \frac{1}{2} z_{d-j}^2 \right)^{b_j - b_{j+1}}. \tag{2}$$

Поскольку Z и X связаны линейным преобразованием, в дальнейшем будем работать с распределением Z, что значительно удобнее. Затем можно перейти к распределению X. В частности, если $\varphi_Z(s)$ – характеристическая функция Z, то характеристическая функция X определится как $\varphi_X(t) = \exp(it'\mu)\varphi_Z(P't)$.

3. Моменты

В данном разделе приведен вывод условий существования и формулы смешанного момента общего вида $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d})$ для *t*-распределения с вектором степеней свободы в стандартизованной форме. Нетрудно проверить, что при $a_1 = a_2 = ... = a_d$ полученные результаты сводятся к известным результатам для многомерного *t*-распределения со скалярным параметром степеней свободы.

Обозначим $s_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{j} r_{d+i-j}$ и в дальнейшем будем использовать стандартное обозначение $\mathrm{B}(\cdot,\cdot)$ для бета-функции. При выводе формул смешанного момента и маргинальных функций плотности нам будет удобна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $a > 0$, $c > -1$ и $b + \frac{c+1}{2} < 0$, тогда

$$\int_0^{+\infty} \left(a + \frac{1}{2}z^2\right)^b z^c dz = a^{b+\frac{c+1}{2}} 2^{\frac{c-1}{2}} \mathrm{B}\left(-b - \frac{c+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right).$$

Доказательство. Используя замену переменных $t = \dfrac{a}{a + \frac{1}{2}z^2}$, имеем

$$\int_0^{+\infty} \left(a + \frac{1}{2}z^2\right)^b z^c dz = a^{b+\frac{c+1}{2}} 2^{\frac{c-1}{2}} \int_0^1 t^{-b-\frac{c+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{c+1}{2}-1} dt =$$

$$a^{b+\frac{c+1}{2}} 2^{\frac{c-1}{2}} \mathrm{B}\left(-b - \frac{c+1}{2}, \frac{c+1}{2}\right).$$

Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (2), $r_j \in \{0,1,2...\}$ и $b_j > \frac{j}{2} + s_j$ для $j = 1,...,d$. Тогда смешанный момент $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d})$ существует. При этом

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d}) = 0,$$

если r_j нечетно для некоторого j, и

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d}) = 2^{s_d} \pi^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)} \prod_{j=1}^{d} \mathrm{B}\left(b_j - \frac{j}{2} - s_j, \frac{r_{d-j+1}+1}{2}\right), \tag{3}$$

если r_j четно для всех $j = 1,...,d$.

Доказательство. Для смешанного момента общего вида имеем

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} dz_1 dz_2 ... dz_d =$$

$$= \sum_{O \in \mathbb{O}} \int_O f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} dz_1 dz_2 ... dz_d,$$

где $\mathbf{O}$ – множество всех 2^d ортантов пространства $\mathbf{R}^d$. Обозначим через $n(O)$ и $k_1, k_2, ..., k_{n(O)}$ соответственно количество и номера переменных, которые являются отрицательными в ортанте O, то есть $z_{k_1} < 0, z_{k_2} < 0, ..., z_{k_{n(O)}} < 0$. Этим переменным соответствуют порядки моментов $r_{k_1}, r_{k_2}, ..., r_{k_{n(O)}}$. В интеграле для ортанта O изменим порядок интегрирования следующим образом

$$\int_O f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} dz_1 dz_2 ... dz_d =$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 ... \int_{-\infty}^0 \begin{matrix} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) \\ z_{k_1}^{r_{k_1}} z_{k_2}^{r_{k_2}} ... z_{k_n}^{r_{k_n}} z_{k_{n+1}}^{r_{k_{n+1}}} ... z_{k_d}^{r_{k_d}} dz_{k_1} dz_{k_1} ... dz_{k_n} dz_{k_{n+1}} ... dz_d \end{matrix}.$$

Используя замену $t_{k_1} = -z_{k_1}$ и четность $f_Z(z_1, z_2, ..., z_d)$ по z_{k_1}, получаем

$$\int_O f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} dz_1 dz_2 ... dz_d =$$

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 ... \int_{+\infty}^0 \begin{matrix} f_Z(z_1, z_2, ,..., -t_{k_1}, ..., z_d) \\ (-t_{k_1})^{r_{k_1}} z_{k_2}^{r_{k_2}} ... z_{k_n}^{r_{k_n}} z_{k_{n+1}}^{r_{k_{n+1}}} ... z_{k_d}^{r_{k_d}} (-dt_{k_1}) dz_{k_2} ... dz_{k_n} dz_{k_{n+1}} ... dz_d \end{matrix} =$$

$$= (-1)^{r_{k_1}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 ... \int_0^{+\infty} \begin{matrix} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) \\ z_{k_1}^{r_{k_1}} z_{k_2}^{r_{k_2}} ... z_{k_n}^{r_{k_n}} z_{k_{n+1}}^{r_{k_{n+1}}} ... z_{k_d}^{r_{k_d}} dz_{k_1} dz_{k_2} ... dz_{k_n} dz_{k_{n+1}} ... dz_d \end{matrix}.$$

Применяя аналогичную замену для $z_{k_2}, ..., z_{k_n}$ и полагая $r_{k_0} = 0$, имеем

$$\int_O f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} dz_1 dz_2 ... dz_d =$$

$$= (-1)^{\sum_{i=0}^{n} r_{k_i}} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} dz_1 dz_2 ... dz_d.$$

Тогда смешанный момент общего вида определится следующим образом

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d}) =$$
$$\left(\sum_{O \in \mathbb{O}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(O)} r_{k_i(O)}} \right) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} dz_1 dz_2 ... dz_d. \quad (4)$$

Пусть r_j нечетно для некоторого j. Обозначим через $\bar{\mathbf{O}}$ множество ортантов, в которых $z_j > 0$, а через $\underline{\mathbf{O}}$ – множество ортантов, в которых $z_j < 0$. Возьмем произвольный ортант из первой группы $\bar{O} \in \bar{\mathbf{O}}$. Тогда $z_{k_1(\bar{O})} < 0, z_{k_2(\bar{O})} < 0, ..., z_{k_{n(\bar{O})}(\bar{O})} < 0$, причем $j \notin \left\{ k_1(\bar{O}), k_2(\bar{O}), ..., k_{n(\bar{O})}(\bar{O}) \right\}$. Очевидно, что существует ортант из второй группы $\underline{O} \in \underline{\mathbf{O}}$, для которого знаки всех переменных, кроме z_j, такие же, как в ортанте $\bar{O}$, так что $\left\{k_1(\underline{O}), k_2(\underline{O}), ..., k_{n(\underline{O})}(\underline{O})\right\} = \left\{k_1(\bar{O}), k_2(\bar{O}), ..., k_{n(\bar{O})}(\bar{O}), j\right\}$. Тогда в сумме, присутствующей в формуле (4), слагаемое, соответствующее ортанту $\bar{O}$, имеет вид $(-1)^{\sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}}$, а слагаемое для ортанта $\underline{O}$ равно $(-1)^{\sum_{i=0}^{n(\underline{O})} r_{k_i(\underline{O})}} = (-1)^{r_j + \sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}} = -(-1)^{\sum_{i=0}^{n(\bar{O})} r_{k_i(\bar{O})}}$. Проводя аналогичные рассуждения для всех ортантов из $\bar{\mathbf{O}}$ и замечая, что $\bar{\mathbf{O}} \cap \underline{\mathbf{O}} = \varnothing$, $\mathbf{O} = \bar{\mathbf{O}} \cup \underline{\mathbf{O}}$ и $|\bar{\mathbf{O}}| = |\underline{\mathbf{O}}|$, получаем

$$\sum_{O \in \mathbb{O}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(O)} r_{k_i(O)}} = \sum_{O \in \bar{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(O)} r_{k_i(O)}} + \sum_{O \in \underline{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(O)} r_{k_i(O)}} =$$

$$\sum_{O \in \bar{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(O)} r_{k_i(O)}} - \sum_{O \in \bar{\mathbb{O}}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(O)} r_{k_i(O)}} = 0.$$

Следовательно, если r_j нечетно для некоторого j и интеграл в формуле (4) сходится, то $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d}) = 0$. Если же r_j четно для всех $j = 1, ..., d$ и интеграл в (4) сходится, то очевидно, что $\sum_{O \in \mathbf{O}} (-1)^{\sum_{i=0}^{n(O)} r_{k_i(O)}} = 2^d$, и соответственно

$$E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d}) = 2^d \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} \, dz_1 \, dz_2 ... dz_d .$$

Нахождение смешанного момента общего вида, таким образом, сводится к проверке сходимости и вычислению следующего интеграла

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} \, dz_1 dz_2 ... dz_d =$$

$$= C \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} ... \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + ... + \frac{1}{2} z_d^2\right)^{-b_1} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + ... + \frac{1}{2} z_{d-1}^2\right)^{b_1 - b_2} ...$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d} \, dz_1 dz_2 ... dz_d .$$

Для этого проводим последовательное интегрирование по $z_d, z_{d-1}, ..., z_1$. При интегрировании по z_d с помощью Леммы 1 получим

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}...\int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d}\, dz_1 dz_2 ... dz_d =$$

$$= C\,2^{\frac{r_d-1}{2}} \mathrm{B}\left(b_1 - \frac{r_d+1}{2}, \frac{r_d+1}{2}\right) \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}...\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{d-1}^2\right)^{-b_2+\frac{r_d+1}{2}} \times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{d-2}^2\right)^{b_2-b_3}...\left(1+\frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d} z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_{d-1}^{r_{d-1}}\, dz_1 dz_2 ... dz_{d-1}.$$

При этом интегрирование на данном шаге возможно, поскольку $b_1 > \frac{r_d+1}{2}$ и $r_d > -1$ в рамках предположений теоремы, а следовательно несобственный интеграл $\int_0^1 t^{b_1-\frac{r_d+1}{2}-1}(1-t)^{\frac{r_d+1}{2}-1}dt$, определяющий бета-функцию, сходится.

Интегрирование по $z_{d-1}, z_{d-2}, ..., z_2$ проводится аналогичным образом с использованием Леммы 1. При этом на каждом шаге в рамках предположений теоремы соответствующий несобственный интеграл, определяющий бета-функцию, сходится. Применяя данную схему, имеем

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}...\int_0^{+\infty} f_Z(z_1, z_2, ..., z_d) z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_d^{r_d}\, dz_1 dz_2 ... dz_d =$$

$$= C\,2^{\frac{r_d-1}{2}+\frac{r_{d-1}-1}{2}} \mathrm{B}\left(b_1 - \frac{r_d+1}{2}, \frac{r_d+1}{2}\right) \mathrm{B}\left(b_2 - \frac{r_d+1}{2} - \frac{r_{d-1}+1}{2}, \frac{r_{d-1}+1}{2}\right) \times$$

$$\times\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}...\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{d-2}^2\right)^{-b_3+\frac{r_d+1}{2}+\frac{r_{d-1}+1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{d-3}^2\right)^{b_3-b_4}\times...$$

$$...\left(1+\frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d} z_1^{r_1} z_2^{r_2} ... z_{d-2}^{r_{d-2}}\, dz_1 dz_2 ... dz_{d-2} = ... =$$

$$= C\,2^{\frac{r_d-1}{2}+\frac{r_{d-1}-1}{2}+...+\frac{r_1-1}{2}} \mathrm{B}\left(b_1 - \frac{r_d+1}{2}, \frac{r_d+1}{2}\right) \mathrm{B}\left(b_2 - \frac{r_d+1}{2} - \frac{r_{d-1}+1}{2}, \frac{r_{d-1}+1}{2}\right) \times ...$$

$$...\mathrm{B}\left(b_d - \frac{r_d+1}{2} - \frac{r_{d-1}+1}{2} - ... - \frac{r_1+1}{2}, \frac{r_1+1}{2}\right). \tag{5}$$

Применение (1) и (4) дает утверждение теоремы.

Теорема 1 доказана.

Замечание. Если условия Теоремы 1 не выполнены, то $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d})$ не существует. Действительно, если $r_j \le -1$ или $b_j \le \frac{j}{2} + s_j$ для некоторого j, то интеграл, определяющий одну из бета-функций в (5), расходится, а значит, расходится интеграл в формуле (4). Таким образом условия Теоремы 1 являются необходимыми и достаточными для существования $E(Z_1^{r_1} Z_2^{r_2} ... Z_d^{r_d})$.

Используя Теорему 1, получаем, что математическое ожидание вектора Z существует только при $a_j > \frac{j}{2},\ j = 1,...,d$ и $E(Z) = 0$, а ковариационная матрица существует только при $a_j > \frac{j+1}{2},\ j = 1,...,d$ и ее элементы равны

$$Var(Z_1) = \frac{2}{2a_d - d - 1},$$

$$Var(Z_j) = \frac{2}{2a_{d-j+1} - d + j - 2} \prod_{i=d-j+2}^{d} \frac{2a_i - i}{2a_i - i - 1},\ j = 2,...,d,$$

$$Cov(Z_i, Z_j) = 0,\ i, j = 1,...,d;\ i \ne j.$$

Заметим, что условия существования математического ожидания для всего вектора Z совпадают с условиями существования математического ожидания его последней компоненты Z_d, а существование ковариационной матрицы Z равносильно существованию $E(Z_d^2)$.

С помощью Теоремы 1 также может быть получена формула смешанных моментов распределения вектора X. Напомним, что $X - \mu = PZ$, где P – нижняя треугольная матрица и $PP' = A$. Предполагая $r_j \ge 0$ для всех $j = 1,...,d$, рассмотрим центральный смешанный момент вектора X общего вида

$$E\left((X_1 - \mu_1)^{r_1} (X_2 - \mu_2)^{r_2} ... (X_i - \mu_i)^{r_i} ... (X_d - \mu_d)^{r_d}\right) =$$

$$= E\begin{pmatrix} (p_{11}Z_1)^{r_1} (p_{21}Z_1 + p_{22}Z_2)^{r_2} ... (p_{i1}Z_1 + p_{i2}Z_2 + ... + p_{ii}Z_i)^{r_i} ... \\ (p_{d1}Z_1 + p_{d2}Z_2 + ... + p_{dd}Z_d)^{r_d} \end{pmatrix}.$$

Преобразуя степени в суммы с помощью мультиномиальной теоремы, получаем

$$E\left((X_1-\mu_1)^{r_1}(X_2-\mu_2)^{r_2}\ldots(X_i-\mu_i)^{r_i}\ldots(X_d-\mu_d)^{r_d}\right)=$$

$$=E\left(\begin{array}{l}\left(\sum\limits_{\substack{k_1^1\ge 0\\ k_1^1=r_1}}\dfrac{r_1!\,p_{11}^{k_1^1}}{k_1^1!}Z_1^{k_1^1}\right)\left(\sum\limits_{\substack{k_1^2,k_2^2\ge 0\\ k_1^2+k_2^2=r_2}}\dfrac{r_2!\,p_{21}^{k_1^2}p_{22}^{k_2^2}}{k_1^2!\,k_2^2!}Z_1^{k_1^2}Z_2^{k_2^2}\right)\ldots\\ \left(\sum\limits_{\substack{k_1^i,k_2^i,\ldots,k_i^i\ge 0\\ k_1^i+k_2^i+\ldots+k_i^i=r_i}}\dfrac{r_i!\,p_{i1}^{k_1^i}p_{i2}^{k_2^i}\cdots p_{ii}^{k_i^i}}{k_1^i!\,k_2^i!\ldots k_i^i!}Z_1^{k_1^i}Z_2^{k_2^i}\ldots Z_i^{k_i^i}\right)\ldots\end{array}\right.$$

$$\left.\ldots\left(\sum\limits_{\substack{k_1^d,k_2^d,\ldots,k_d^d\ge 0\\ k_1^d+k_2^d+\ldots+k_d^d=r_d}}\dfrac{r_d!\,p_{d1}^{k_1^d}p_{d2}^{k_2^d}\cdots p_{dd}^{k_d^d}}{k_1^d!\,k_2^d!\ldots k_d^d!}Z_1^{k_1^d}Z_2^{k_2^d}\ldots Z_d^{k_d^d}\right)\right)=$$

$$=E\left(\sum\limits_{\substack{k_1^1=r_1\\ k_1^2+k_2^2=r_2\\ \ldots\\ k_1^d+k_2^d+\ldots+k_d^d=r_d}}\left(\prod_{i=1}^{d}\frac{r_i!\,p_{i1}^{k_1^i}p_{i2}^{k_2^i}\cdots p_{ii}^{k_i^i}}{k_1^i!\,k_2^i!\ldots k_i^i!}\right)Z_1^{k_1^1+k_1^2+\ldots+k_1^d}Z_2^{k_2^2+k_2^3+\ldots+k_2^d}\ldots Z_d^{k_d^d}\right)=$$

$$=\sum\limits_{\substack{k_1^1,k_1^2,k_2^2,\ldots,k_1^d,k_2^d,\ldots,k_d^d\ge 0\\ k_1^1=r_1\\ k_1^2+k_2^2=r_2\\ \ldots\\ k_1^d+k_2^d+\ldots+k_d^d=r_d}}\left(\prod_{i=1}^{d}\frac{r_i!\,p_{i1}^{k_1^i}p_{i2}^{k_2^i}\cdots p_{ii}^{k_i^i}}{k_1^i!\,k_2^i!\ldots k_i^i!}\right)E\left(Z_1^{k_1^1+k_1^2+\ldots+k_1^d}Z_2^{k_2^2+k_2^3+\ldots+k_2^d}\ldots Z_d^{k_d^d}\right)=$$

$$=\sum\limits_{\substack{k_1^1,k_1^2,k_2^2,\ldots,k_1^d,k_2^d,\ldots,k_d^d\ge 0\\ k_1^1=r_1\\ k_1^2+k_2^2=r_2\\ \ldots\\ k_1^d+k_2^d+\ldots+k_d^d=r_d}}\left(\prod_{i=1}^{d}\frac{r_i!\,p_{i1}^{k_1^i}p_{i2}^{k_2^i}\cdots p_{ii}^{k_i^i}}{k_1^i!\,k_2^i!\ldots k_i^i!}\right)$$

$$1\left\{\begin{array}{l}k_1^1+k_1^2+\ldots+k_1^d\,\vdots\,2,\\ k_2^2+k_2^3+\ldots+k_2^d\,\vdots\,2,\\ \ldots\\ k_d^d\,\vdots\,2\end{array}\right\}2^{\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{d}\left(k_j^j+k_j^{j+1}+\ldots+k_j^d\right)}\pi^{-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{d}\mathrm{B}\left(b_j-\frac{j}{2}-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{j}\left(k_{d+l-j}^{d+l-j}+k_{d+l-j}^{d+l-j+1}+\ldots+k_{d+l-j}^{d}\right),\frac{k_{d-j+1}^{d-j+1}+k_{d-j+1}^{d-j+2}+\ldots+k_{d-j+1}^{d}+1}{2}\right),$$

где $1\{\cdot\}$ – индикаторная функция. Группируя сомножители, для смешанного момента вектора X окончательно получаем

$$E\left((X_1-\mu_1)^{r_1}(X_2-\mu_2)^{r_2}\ldots(X_i-\mu_i)^{r_i}\ldots(X_d-\mu_d)^{r_d}\right)=$$

$$=\pi^{-\frac{d}{2}}\frac{\Gamma_d^*(b)}{\Gamma_d^*(a)}\sum_{\substack{k_1^1,k_1^2,k_2^2,\ldots,k_1^d,k_2^d,\ldots,k_d^d\ge 0\\ k_1^1=r_1\\ k_1^2+k_2^2=r_2\\ \ldots\\ k_1^d+k_2^d+\ldots+k_d^d=r_d}} 1\left\{\begin{matrix} k_1^1+k_1^2+\ldots+k_1^d\,\vdots\,2,\\ k_2^2+k_2^3+\ldots+k_2^d\,\vdots\,2,\\ \ldots\\ k_d^d\,\vdots\,2\end{matrix}\right\} 2^{\frac{1}{2}\sum\limits_{\substack{1\le j\le d\\ j\le i\le d}}k_j^i}\times$$

$$\times\prod_{j=1}^{d}\frac{r_j!\,p_{j1}^{k_1^j}p_{j2}^{k_2^j}\ldots p_{jj}^{k_j^j}}{k_1^j!\,k_2^j!\ldots k_j^j!}\mathrm{B}\left(b_j-\frac{j}{2}-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{j}\begin{matrix}\left(k_{d+l-j}^{d+l-j}+k_{d+l-j}^{d+l-j+1}+\ldots+k_{d+l-j}^{d}\right),\\ \dfrac{k_{d-j+1}^{d-j+1}+k_{d-j+1}^{d-j+2}+\ldots+k_{d-j+1}^{d}+1}{2}\end{matrix}\right).$$

При этом, как и в случае вектора Z, для существования $E\left((X_1-\mu_1)^{r_1}(X_2-\mu_2)^{r_2}\ldots(X_d-\mu_d)^{r_d}\right)$ требуется положительность аргументов всех бета-функций, входящих в полученную формулу.

4. Одномерные маргинальные функции плотности

При выводе одномерных маргинальных функций плотности *t*-распределения с вектором степеней свободы используются интегральные представления обобщенных гипергеометрических функций ${}_pF_q(m_1,\ldots,m_p;n_1,\ldots,n_q;y)$. Далее приведены интегральные представления для тех значений аргументов, которые будут встречаться при выводе маргинальных распределений. Леммы 2 и 3 могут быть найдены в [1] и [2]. Лемма 2 также приведена в [8], а Лемма 3 – в [9].

Лемма 2. Пусть $m_1,m_2,n,y\in\mathbf{R}$, $n>m_2>0$ и $y\le 0$. Тогда

$${}_2F_1(m_1,m_2;n;y)=\frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m_2)\Gamma(n-m_2)}\int_0^{+\infty}t^{-m_2+n-1}(t+1)^{m_1-n}(t-y+1)^{-m_1}\,dt.$$

Лемма 3. Пусть $q \in \{2,3,...\}$, $m_1,...,m_{q+1},n_1,...,n_q,y \in \mathbf{R}$, $n_1,...,n_{q-1} \notin \{0,-1,-2,...\}$, $n_q > m_{q+1} > 0$ и $y \le 0$. Тогда

$$
{}_{q+1}F_q(m_1,...,m_{q+1};n_1,...,n_q;y) =
$$

$$
= \frac{\Gamma(n_q)}{\Gamma(m_{q+1})\Gamma(n_q - m_{q+1})} \int_0^1 t^{m_{q+1}-1}(1-t)^{n_q-m_{q+1}-1} {}_qF_{q-1}(m_1,...,m_q;n_1,...,n_{q-1};yt)\,dt.
$$

Базовые свойства обобщенной гипергеометрической функции, приведенные в Леммах 4 и 5, также рассмотрены в [2].

Лемма 4. Значение функции ${}_pF_q(m_1,...,m_p;n_1,...,n_q;y)$ не зависит от порядка расположения параметров внутри групп $m_1,...,m_p$ и $n_1,...,n_q$.

Лемма 5. Имеет место следующая формула понижения порядка обобщенной гипергеометрической функции при совпадении значений параметров в первой и второй группах

$$
{}_pF_q(m_1,...,m_{p-r},m_{p-r+1},...,m_p;n_1,...,n_{q-r},m_{p-r+1},...,m_p;y) =
$$

$$
= {}_{p-r}F_{q-r}(m_1,...,m_{p-r};n_1,...,n_{q-r};y).
$$

В Теореме 2 приведена общая формула одномерной маргинальной функции плотности для t-распределения с вектором степеней свободы в стандартизованной форме. Заметим, что в случае векторного параметра степеней свободы все одномерные маргинальные распределения имеют разную функциональную форму, в то время как при скалярном параметре степеней свободы все они являются t-распределениями.

Теорема 2. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (2). Тогда маргинальная функция плотности распределения компоненты Z_j имеет вид

$$
f_{Z_j}(z_j) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}\right)} \prod_{k=d-j+2}^{d} \frac{\Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)\Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \times
$$

$$
\times {}_jF_{j-1}\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}, ..., a_d - \frac{d-2}{2};\right.
$$

$$
\left. a_{d-j+2} - -\frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+3} - \frac{d-j}{2}, ..., a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{1}{2}z_j^2\right).
$$

Доказательство. С учетом (1) для маргинальной функции плотности распределения компоненты Z_j имеем

$$f_{Z_j}(z_j)=$$

$$=C\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}...\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=0}^{d-1}\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{2}z_2^2+...+\frac{1}{2}z_{d-j}^2\right)^{b_j-b_{j+1}}dz_1...dz_{j-1}dz_{j+1}...dz_d=$$

$$=2^{d-1}C\int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty}...\int\limits_{0}^{+\infty}\prod_{j=0}^{d-1}\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+\frac{1}{2}z_2^2+...+\frac{1}{2}z_{d-j}^2\right)^{b_j-b_{j+1}}dz_1...dz_{j-1}\,dz_{j+1}...dz_d.$$

На первом этапе интегрируем последовательно по $z_d, z_{d-1},...,z_{j+1}$, применяя Лемму 1.

$$f_{Z_j}(z_j)=2^{d-1-\frac{1}{2}}\mathrm{B}\left(b_1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)C\int\limits_{0}^{+\infty}...\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{d-1}^2\right)^{-b_2+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{d-2}^2\right)^{b_2-b_3}}...$$

$$...\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_j^2\right)^{b_{d-j}-b_{d-j+1}}...\left(1+\frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d}$$

$$dz_1...dz_{j-1}dz_{j+1}...dz_{d-1}=...=$$

$$=2^{d-1-\frac{d-j}{2}}\mathrm{B}\left(b_1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(b_2-1,\frac{1}{2}\right)...\mathrm{B}\left(b_{d-j}-\frac{d-j}{2},\frac{1}{2}\right)$$

$$C\int\limits_{0}^{+\infty}...\int\limits_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_j^2\right)^{-b_{d-j+1}+\frac{d-j}{2}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{j-1}^2\right)^{b_{d-j+1}-b_{d-j+2}}...\left(1+\frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d}dz_1...dz_{j-1}.$$

На втором этапе интегрируем последовательно по $z_{j-1}, z_{j-2},...,z_1$. Положим

$$D=2^{d-1-\frac{d-j}{2}}\mathrm{B}\left(b_1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\mathrm{B}\left(b_2-1,\frac{1}{2}\right)...\mathrm{B}\left(b_{d-j}-\frac{d-j}{2},\frac{1}{2}\right)C. \tag{6}$$

Используем замену переменных $t=\dfrac{\frac{1}{2}z_{j-1}^2}{1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{j-2}^2}$. Тогда

$$f_{Z_j}(z_j)=$$

$$=2^{-\frac{1}{2}}D\int\limits_0^{+\infty}\ldots\int\limits_0^{+\infty}t^{-\frac{1}{2}}(1+t)^{b_{d-j+1}-b_{d-j+2}}\left(1+t-\frac{-\frac{1}{2}z_j^2}{1+\frac{1}{2}z_1^2+\ldots+\frac{1}{2}z_{j-2}^2}\right)^{-b_{d-j+1}+\frac{d-j}{2}}\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+\ldots+\frac{1}{2}z_{j-2}^2\right)^{\frac{d-j}{2}-b_{d-j+3}+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+\ldots+\frac{1}{2}z_{j-3}^2\right)^{b_{d-j+3}-b_{d-j+4}}\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d}dz_1\ldots dz_{j-2}dt.$$

Применяя Лемму 2, имеем

$$f_{Z_j}(z_j)=2^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(b_{d-j+2}-\frac{d-j}{2}-\frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(b_{d-j+2}-\frac{d-j}{2}\right)}D\times$$

$$\times\int\limits_0^{+\infty}\ldots\int\limits_0^{+\infty}{}_2F_1\left(\begin{array}{l}b_{d-j+1}-\frac{d-j}{2},b_{d-j+2}-\frac{d-j}{2}-\frac{1}{2};b_{d-j+2}-\frac{d-j}{2};\\ \frac{-\frac{1}{2}z_j^2}{1+\frac{1}{2}z_1^2+\ldots+\frac{1}{2}z_{j-2}^2}\end{array}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+\ldots+\frac{1}{2}z_{j-2}^2\right)^{\frac{d-j}{2}-b_{d-j+3}+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2}z_1^2+\ldots+\frac{1}{2}z_{j-3}^2\right)^{b_{d-j+3}-b_{d-j+4}}\ldots$$

$$\left(1+\frac{1}{2}z_1^2\right)^{b_{d-1}-b_d}dz_1\ldots dz_{j-2}.$$

Далее произведем замену переменных $s=\dfrac{1+\frac{1}{2}z_1^2+\ldots+\frac{1}{2}z_{j-3}^2}{1+\frac{1}{2}z_1^2+\ldots+\frac{1}{2}z_{j-2}^2}$.

Тогда имеем

$$f_{Z_j}(z_j) = 2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}\right)} D \times$$

$$\times \int_0^1 \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} {}_2F_1 \left(\begin{array}{l} b_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}; b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}; \\ \left(\frac{-\frac{1}{2} z_j^2}{1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} z_{j-3}^2} \right) s \end{array} \right) \times$$

$$\times s^{b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}} (1-s)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} z_{j-3}^2\right)^{\frac{d-j}{2} - b_{d-j+4} + 1}$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} z_{j-4}^2\right)^{b_{d-j+4} - b_{d-j+5}} \ldots$$

$$\ldots \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} dz_1 \ldots dz_{j-3} ds.$$

Применяя Лемму 3, получаем

$$f_{Z_j}(z_j) = 2^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\pi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}\right)\Gamma\left(b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}\right)} D \times$$

$$\times \int_0^{+\infty} \ldots \int_0^{+\infty} {}_3F_2 \left(b_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}, b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}; \right.$$

$$\left. b_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}, b_{d-j+3} - \frac{d-j}{2} - \frac{1}{2}; \frac{-\frac{1}{2} z_j^2}{1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} z_{j-3}^2} \right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} z_{j-3}^2\right)^{\frac{d-j}{2} - b_{d-j+4} + 1} \left(1 + \frac{1}{2} z_1^2 + \ldots + \frac{1}{2} z_{j-4}^2\right)^{b_{d-j+4} - b_{d-j+5}} \ldots$$

$$\left(1 + \frac{1}{2} z_1^2\right)^{b_{d-1} - b_d} dz_1 \ldots dz_{j-3}$$

Используя аналогичную замену переменных вида $s = \dfrac{1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_{k-1}^2}{1+\frac{1}{2}z_1^2+...+\frac{1}{2}z_k^2}$ последовательно для $k = j-3,...,2$ и $s = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}z_1^2}$ для z_1 и интегрируя после замены каждый раз по s, имеем

$$f_{Z_j}(z_j) = 2^{-\frac{j-1}{2}} \frac{\Gamma\left(b_{d-j+2}-\frac{d-j}{2}-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(b_{d-j+3}-\frac{d-j}{2}-1\right)...\Gamma\left(b_d-\frac{d-j}{2}-\frac{j-1}{2}\right)\pi^{\frac{j-1}{2}}}{\Gamma\left(b_{d-j+2}-\frac{d-j}{2}\right)\Gamma\left(b_{d-j+3}-\frac{d-j}{2}-\frac{1}{2}\right)...\Gamma\left(b_d-\frac{d-j}{2}-\frac{j-2}{2}\right)} D \times$$

$$\times {}_jF_{j-1}\left(b_{d-j+1}-\frac{d-j}{2}, b_{d-j+2}-\frac{d-j}{2}-\frac{1}{2},...,b_d-\frac{d-j}{2}-\frac{j-1}{2};\right.$$

$$\left. b_{d-j+2}-\frac{d-j}{2}, b_{d-j+3}-\frac{d-j}{2}-\frac{1}{2},...,b_d-\frac{d-j}{2}-\frac{j-2}{2};-\frac{1}{2}z_j^2\right).$$

Применяя (1), (6), свойство бета-функции $\mathrm{B}(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, а также обозначение $b_j = a_j + \dfrac{1}{2},\ j = 1,...,d$, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2 доказана.

В случае скалярного параметра степеней свободы, то есть при $a_1 = a_2 = ... = a_d = a$, порядок обобщенной гипергеометрической функции в формуле маргинальной функции плотности распределения Z_j понижается на $j-1$, поскольку $j-1$ параметров первой группы совпадают с $j-1$ параметрами второй группы (использованы Леммы 4 и 5). Имеем

$${}_jF_{j-1}\left(a-\frac{d-j-1}{2}, a-\frac{d-j}{2},...,a-\frac{d-2}{2};\right.$$

$$\left. a-\frac{d-j-1}{2}, a-\frac{d-j}{2},...,a-\frac{d-3}{2};-\frac{1}{2}z_j^2\right) =$$

$$= {}_1F_0\left(a-\frac{d-2}{2};;-\frac{1}{2}z_j^2\right) = \left(1+\frac{1}{2}z_j^2\right)^{-a+\frac{d-2}{2}},$$

где мы использовали таблицу значений обобщенной гипергеометрической функции (см. [2]). Получаем, что маргинальная функция плотности распределения Z_j сводится к

$$f_{Z_j}(z_j) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a - \frac{d-2}{2}\right)}{\Gamma\left(a - \frac{d-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{1}{2} z_j^2\right)^{-a+\frac{d-2}{2}}.$$

Таким образом, для любого $j = 1, ..., d$ случайная величина $\sqrt{\frac{2a-d+1}{2}} Z_j$ имеет стандартное *t*-распределение с $2a - d + 1$ степенями свободы, что является известным результатом из теории многомерного *t*-распределения со скалярным параметром степеней свободы.

5. Характеристические функции одномерных маргинальных распределений

Обобщенную гипергеометрическую функцию можно выразить через более общую специальную функцию – G-функцию Мейера. Лемма 6 приведена в [1] и [2], а также в [10].

Лемма 6. Пусть $q \in \{0,1,...\}$, $p = q + 1$, $m_1, ..., m_p, n_1, ..., n_q, y \in \mathbf{R}$, $n_1, ..., n_q \notin \{0, -1, -2, ...\}$. Тогда

$${}_pF_q(w_1, ..., w_p; v_1, ..., v_q; y) = \frac{\prod_{k=1}^{q} \Gamma(v_k)}{\prod_{k=1}^{p} \Gamma(w_k)} G_{p,q+1}^{1,p}\left(-y \middle| \begin{matrix} 1 - w_1, ..., 1 - w_p \\ 0, 1 - v_1, ..., 1 - v_q \end{matrix}\right).$$

Для G-функции Мейера нам необходим следующий результат, который также может быть найден в [1], [2] и [11].

Лемма 7. Пусть $q \in \{0,1,...\}$, $p = q + 1$, $0 \le m \le q$, $0 \le n \le p$, $p + q < 2(m + n)$, $\alpha > 0$, $c > 0$ и

$w_j < \frac{1}{2},\ j = 1, ..., n$

$w_j \in \mathbf{R},\ j = n+1, ..., p$

$v_j > -\frac{1}{2},\ j = 1, ..., m$

$v_j \in \mathbf{R},\ \ j = m+1,\dots,q$

Тогда

$$\int_0^{+\infty} G_{p,q}^{m,n}\left(\alpha y^2 \middle| \begin{matrix} w_1,\dots,w_p \\ v_1,\dots,v_q \end{matrix}\right)\cos(cy)dy = \pi^{\frac{1}{2}} c^{-1} G_{p+2,q}^{m,n+1}\left(\frac{4\alpha}{c^2} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, w_1,\dots,w_p, 0 \\ v_1,\dots,v_q \end{matrix}\right).$$

Базовые свойства G-функции Мейера, приведенные в Леммах 8 и 9, также рассмотрены в [2].

Лемма 8. Значение функции $G_{p,q}^{m,n}\left(y \middle| \begin{matrix} w_1,\dots,w_p \\ v_1,\dots,v_q \end{matrix}\right)$ не зависит от порядка расположения параметров внутри групп $w_1,\dots,w_n$; $w_{n+1},\dots,w_p$; $v_1,\dots,v_m$ и $v_{m+1},\dots,v_q$.

Лемма 9. Имеют место следующие формулы понижения порядка G-функции Мейера при совпадении значений крайних параметров в первой и второй группах

I. $G_{p,q}^{m,n}\left(y \middle| \begin{matrix} w_1,\dots,w_p \\ v_1,\dots,v_{q-1}, w_1 \end{matrix}\right) = G_{p-1,q-1}^{m,n-1}\left(y \middle| \begin{matrix} w_2,\dots,w_p \\ v_1,\dots,v_{q-1} \end{matrix}\right)$

II. $G_{p,q}^{m,n}\left(y \middle| \begin{matrix} w_1,\dots,w_{p-1}, v_1 \\ v_1,\dots,v_q \end{matrix}\right) = G_{p-1,q-1}^{m-1,n}\left(y \middle| \begin{matrix} w_1,\dots,w_{p-1} \\ v_2,\dots,v_q \end{matrix}\right)$

В следующей теореме приведена общая формула одномерной маргинальной характеристической функции для t-распределения с вектором степеней свободы. Характеристические функции компонент вектора также имеют разную форму вследствие различий функций плотности распределения.

Теорема 3. Пусть Z имеет функцию плотности распределения (2). Тогда характеристическая функция маргинального распределения компоненты Z_j имеет вид

$$\varphi_{Z_j}(t) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G_{j+1,j-1}^{0,j+1}\left(\frac{2}{t^2} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1},\dots,\frac{d}{2} - a_d \\ \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2},\dots,\frac{d-1}{2} - a_d \end{matrix}\right).$$

Доказательство. Обозначим через C_j константу интегрирования в маргинальной функции плотности распределения компоненты Z_j, то есть

$$C_j = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j}{2}\right)} \prod_{k=d-j+2}^{d} \frac{\Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)\Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)}.$$

Тогда, применяя Лемму 6, для характеристической функции маргинального распределения Z_j имеем

$$\varphi_{Z_j}(t) = E\left(\exp\left(itZ_j\right)\right) = E\left(\cos\left(tZ_j\right) + i\sin\left(tZ_j\right)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_j}(z_j)(\cos(tz_j) + i\sin(tz_j))dz_j =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Z_j}(z_j)\cos(tz_j)dz_j = 2\int_{0}^{+\infty} f_{Z_j}(z_j)\cos(|t|z_j)dz_j =$$

$$= 2C_j \int_{0}^{+\infty} {}_jF_{j-1}\left(a_{d-j+1} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+2} - \frac{d-j}{2}, \ldots, a_d - \frac{d-2}{2};\right.$$

$$\left. a_{d-j+2} - \frac{d-j-1}{2}, a_{d-j+3} - \frac{d-j}{2}, \ldots, a_d - \frac{d-3}{2}; -\frac{1}{2}z_j^2\right)\cos(|t|z_j)dz_j =$$

$$= 2C_j \frac{\prod_{k=d-j+2}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)}$$

$$\int_{0}^{+\infty} G_{j,j}^{1,j}\left(\frac{1}{2}z_j^2 \left| \begin{matrix} \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \ldots, \frac{d}{2} - a_d \\ 0, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \ldots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{matrix} \right.\right)\cos(|t|z_j)dz_j.$$

Применяя Лемму 7 к интегралу в данном выражении, получаем

$$\varphi_{Z_j}(t) = 2C_j \frac{\prod_{k=d-j+2}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-3}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)}$$

$$\pi^{\frac{1}{2}} \frac{1}{|t|} G_{j+2,j}^{1,j+1}\left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \ldots, \frac{d}{2} - a_d, 0 \\ 0, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \ldots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{matrix} \right. \right) =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^{d} \Gamma\left(a_k - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G_{j+2,j}^{1,j+1}\left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \ldots, \frac{d}{2} - a_d, 0 \\ 0, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \ldots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{matrix} \right. \right).$$

Поскольку в G-функции Мейера, входящей в данное выражение, последний параметр первой группы и первый параметр второй группы совпадают, из пункта II Леммы 9 следует, что

$$G_{j+2,j}^{1,j+1}\left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \ldots, \frac{d}{2} - a_d, 0 \\ 0, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \ldots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{matrix} \right. \right) =$$

$$= G_{j+1,j-1}^{0,j+1}\left(\frac{2}{t^2} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2}, \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+1}, \ldots, \frac{d}{2} - a_d \\ \frac{d-j+1}{2} - a_{d-j+2}, \ldots, \frac{d-1}{2} - a_d \end{matrix} \right. \right).$$

Подстановка данного результата в выражение для характеристической функции Z_j дает утверждение теоремы.

Теорема 3 доказана.

В случае $a_1 = a_2 = \ldots = a_d = a$ в выражении для характеристической функции Z_j используем свойство симметрии G-функции Мейера (Лемму 8), а затем $j-1$ раз понизим порядок данной функции (пункт I Леммы 9).

Получим

$$\varphi_{Z_j}(t) = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^{d} \Gamma\left(a - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^{d} \Gamma\left(a - \frac{k-1}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{|t|} G_{j+1,j-1}^{0,j+1}\left(\frac{2}{t^2} \middle| \begin{matrix} \frac{d-j+1}{2} - a, \ldots \frac{d-1}{2} - a, \frac{1}{2}, \frac{d}{2} - a \\ \frac{d-1}{2} - a, \ldots, \frac{d-j+1}{2} - a \end{matrix} \right) =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^{d} \Gamma\left(a - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^{d} \Gamma\left(a - \frac{k-1}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{|t|} G_{j,j-2}^{0,j}\left(\frac{2}{t^2} \middle| \begin{matrix} \frac{d-j+2}{2} - a, \ldots, \frac{d-1}{2} - a, \frac{1}{2}, \frac{d}{2} - a \\ \frac{d-1}{2} - a, \ldots, \frac{d-j+2}{2} - a \end{matrix} \right) = \ldots =$$

$$= 2^{\frac{1}{2}} \frac{\prod_{k=d-j+2}^{d} \Gamma\left(a - \frac{k-2}{2}\right)}{\prod_{k=d-j+1}^{d} \Gamma\left(a - \frac{k-1}{2}\right)} \frac{1}{|t|} G_{2,0}^{0,2}\left(\frac{2}{t^2} \middle| \frac{1}{2}, \frac{d}{2} - a \right).$$

Используя таблицу значений G-функции Мейера (см. [2]), окончательно получаем

$$\varphi_{Z_j}(t) = \frac{2^{\frac{3+d}{4} - \frac{a}{2}}}{\Gamma\left(a - \frac{d-1}{2}\right)} |t|^{a - \frac{d-1}{2}} K_{a - \frac{d-1}{2}}\left(\sqrt{2}\,|t|\right),$$

где $K_\nu(\cdot)$ – модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) с параметром ν. Полученная характеристическая функция также показывает, что $\sqrt{\frac{2a-d+1}{2}} Z_j$ имеет стандартное *t*-распределение с $2a-d+1$ степенями свободы. Таким образом, при $a_1 = a_2 = \ldots = a_d$ Теоремы 2 и 3 сводятся к известным результатам о многомерном t-распределении со скалярным параметром степеней свободы.

6. Примеры

Рассмотрим случай $d = 3$ при ограничениях на параметры $a_1 > 0,\ a_2 > \frac{1}{2},\ a_3 > 1$. При построении графиков использованы следующие значения параметров $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$.

Одномерные маргинальные функции плотности

Первая компонента вектора Z имеет обычное t-распределение (нестандартно нормированное, поскольку для стандартизации распределения предполагается $A = I_3$). С помощью Теоремы 2 можно убедиться, что это верно для любого d.

$$f_{Z_1}(z_1) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(a_3 - \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_3 - 1\right)}\left(1 + \frac{1}{2}z_1^2\right)^{-a_3 + \frac{1}{2}}$$

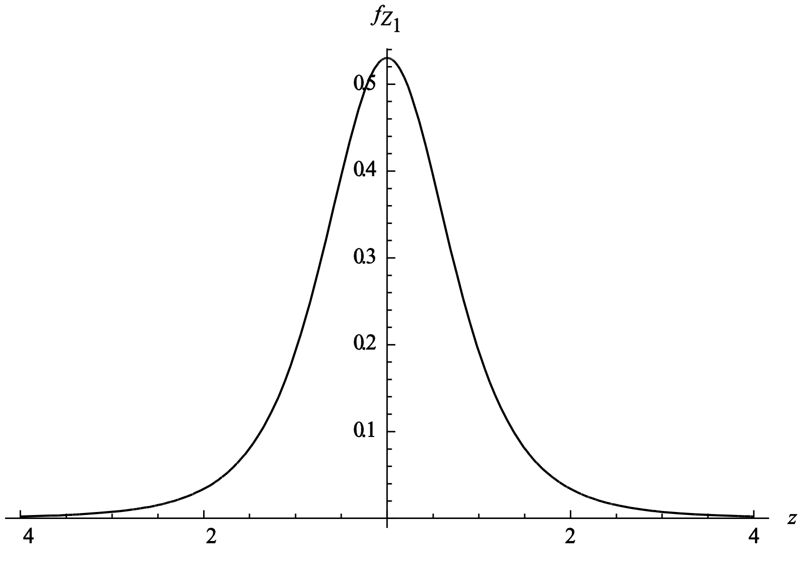

Рис. 1. Функция плотности Z_1 при $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$

Вторая и следующие за ней компоненты вектора Z имеют функции плотности, которые уже не выражаются через элементарные функции при произвольных a_j.

$$f_{Z_2}(z_2) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma(a_2) \Gamma\left(a_3 - \frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(a_2 - \frac{1}{2}\right) \Gamma(a_3 - 1) \Gamma(a_3)} {}_2F_1\left(a_2, a_3 - \frac{1}{2}; a_3; -\frac{1}{2} z_2^2\right)$$

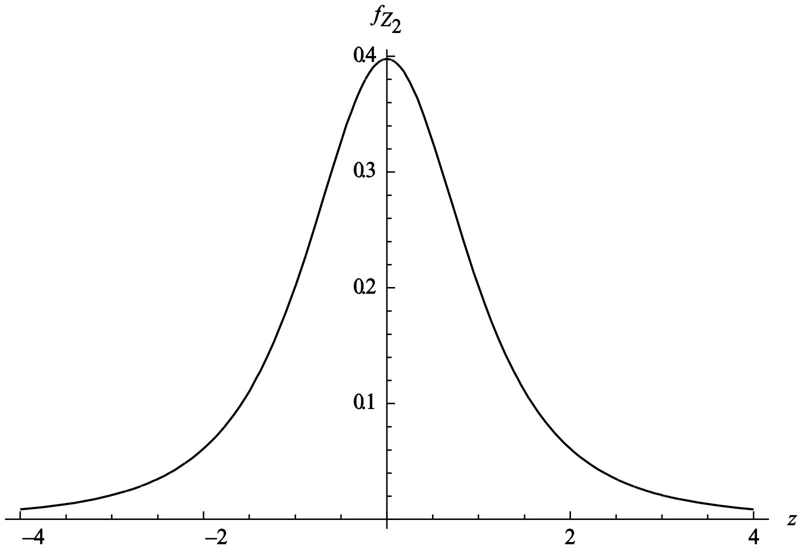

Рис. 2. Функция плотности Z_2 при $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$

$$f_{Z_3}(z_3) = \frac{(2\pi)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(a_1 + \frac{1}{2}\right) \Gamma(a_2)^2 \Gamma\left(a_3 - \frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(a_1) \Gamma\left(a_2 - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(a_2 + \frac{1}{2}\right) \Gamma(a_3 - 1) \Gamma(a_3)} {}_3F_2\left(a_1 + \frac{1}{2}, a_2, a_3 - \frac{1}{2}; a_2 + \frac{1}{2}, a_3; -\frac{1}{2} z_3^2\right)$$

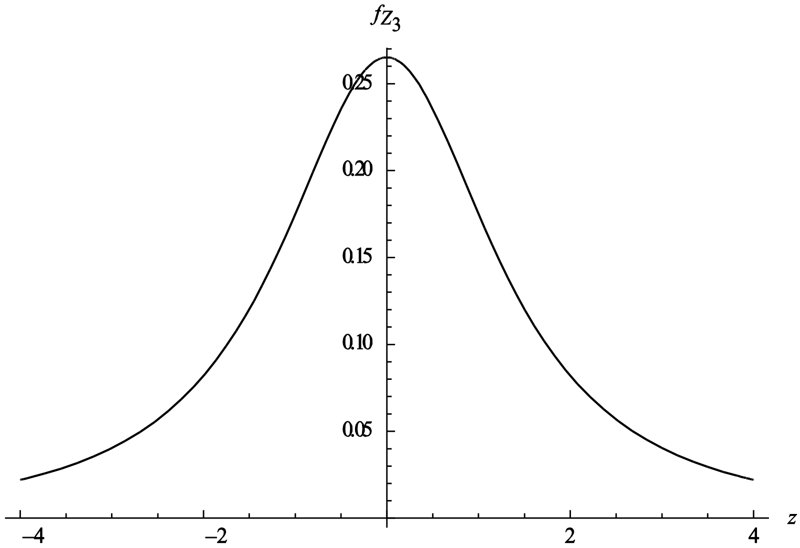

Рис. 3. Функция плотности Z_3 при $a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 3$

Характеристические функции одномерных маргинальных распределений

Характеристическая функция маргинального распределения первой компоненты вектора Z может быть упрощена по сравнению с ее общим видом в Теореме 3, поскольку первая компонента имеет обычное t-распределение.

$$\varphi_{Z_1}(t) = \frac{2^{\frac{3-a_3}{2}} |t|^{a_3-1}}{\Gamma(a_3-1)} K_{a_3-1}\left(\sqrt{2}\,|t|\right)$$

Характеристические функции следующих компонент, начиная со второй, не упрощаются до функций Бесселя или других базовых специальных функций, а могут быть выражены только через достаточно общую G-функцию Мейера.

$$\varphi_{Z_2}(t) = \frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(a_3-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(a_2-\frac{1}{2}\right)\Gamma(a_3-1)} \frac{1}{|t|} G_{3,1}^{0,3}\left(\frac{2}{t^2}\middle|\begin{matrix}\frac{1}{2}, 1-a_2, \frac{3}{2}-a_3\\ 1-a_3\end{matrix}\right)$$

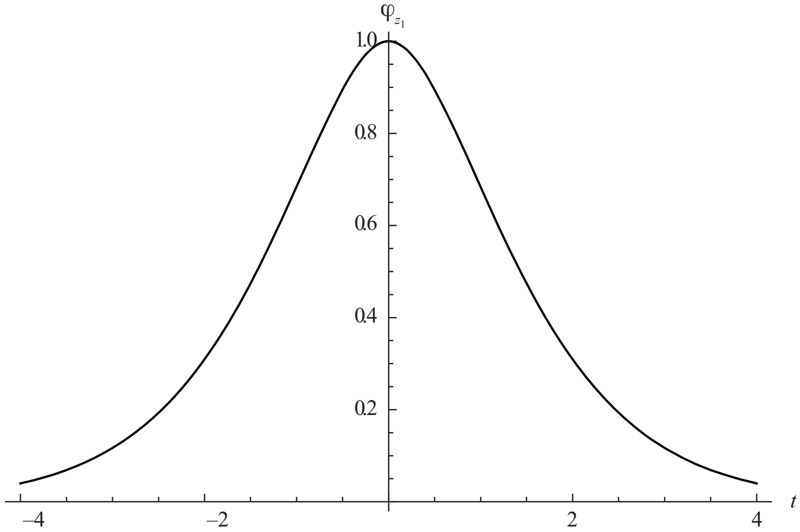

Рис. 4. Характеристическая функция Z_1 при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$

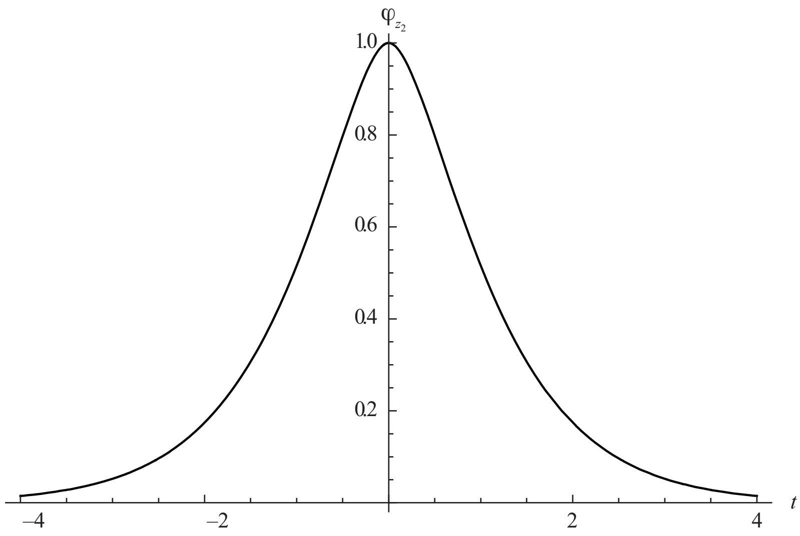

Рис. 5. Характеристическая функция Z_2 при $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$

$$\varphi_{Z_3}(t)=\frac{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(a_2)\Gamma\left(a_3-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a_1)\Gamma\left(a_2-\frac{1}{2}\right)\Gamma(a_3-1)}\frac{1}{|t|}G_{4,2}^{0,4}\left(\frac{2}{t^2}\left|\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}-a_1,1-a_2,\frac{3}{2}-a_3\\ \frac{1}{2}-a_2,1-a_3\end{matrix}\right.\right)$$

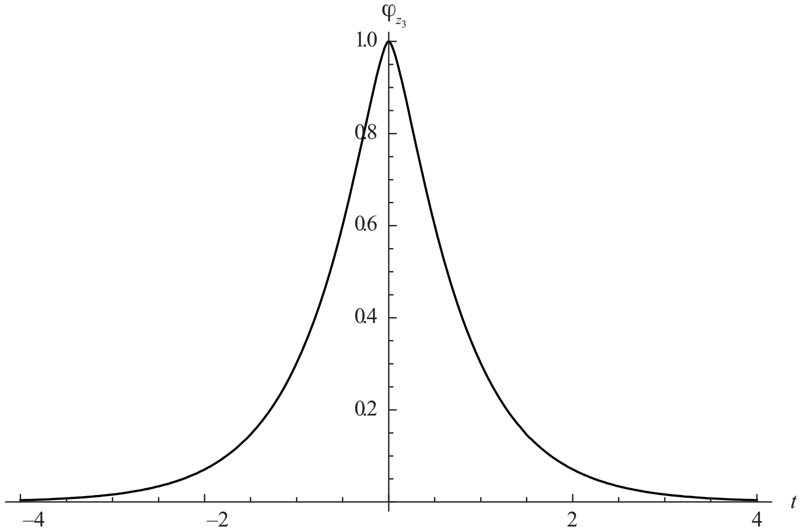

Рис. 6. Характеристическая функция Z_3 при $a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=3$

Моменты

Математическое ожидание вектора $E(Z)=0$ существует при $a_1>\frac{1}{2},\ a_2>1,\ a_3>\frac{3}{2}$.

$E(Z_1)=0$, существует при $a_3>\frac{3}{2}$.

$E(Z_2)=0$, существует при $a_2>1,\ a_3>\frac{3}{2}$.

$E(Z_3)=0$, существует при $a_1>\frac{1}{2},\ a_2>1,\ a_3>\frac{3}{2}$.

Ковариационная матрица вектора $V(Z)$ существует при $a_1 > 1,\ a_2 > \frac{3}{2},\ a_3 > 2$.

$Cov(Z_1, Z_2) = E(Z_1 Z_2) = 0$, существует при $a_2 > 1,\ a_3 > 2$.

$Cov(Z_1, Z_3) = E(Z_1 Z_3) = 0$, существует при $a_1 > \frac{1}{2},\ a_2 > 1,\ a_3 > 2$.

$Cov(Z_2, Z_3) = E(Z_2 Z_3) = 0$, существует при $a_1 > \frac{1}{2},\ a_2 > \frac{3}{2},\ a_3 > 2$.

$Var(Z_1) = E(Z_1^2) = \frac{1}{a_3 - 2}$, существует при $a_3 > 2$.

$Var(Z_2) = E(Z_2^2) = \frac{2a_3 - 3}{(2a_2 - 3)(a_3 - 2)}$, существует при $a_2 > \frac{3}{2},\ a_3 > 2$.

$Var(Z_3) = E(Z_3^2) = \frac{(a_2 - 1)(2a_3 - 3)}{(a_1 - 1)(2a_2 - 3)(a_3 - 2)}$, существует при $a_1 > 1,\ a_2 > \frac{3}{2},\ a_3 > 2$.

7. Симулирование *t*-распределения с вектором степеней свободы

Пусть необходимо симулировать набор независимых *d*-мерных случайных векторов $X^{(1)},\dots,X^{(N)}$, имеющих *t*-распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ, A, a. В данном разделе предложен удобный способ решения этой задачи.

Определение 2. Положительно определенная случайная $d \times d$ матрица W имеет гамма-распределение Беллмана с параметрами a и A, если ее функция плотности имеет вид

$$f(w) = \gamma_{a,A}\, etr\left(-Aw\right) \prod_{j=1}^{d} \left| w_{[j]} \right|^{a_j - a_{j+1}},$$

где

$$\gamma_{a,A} = \left(\Gamma_d^*(a) \prod_{j=0}^{d-1} \left| A^{[d-j]} \right|^{a_j - a_{j+1}} \right)^{-1}.$$

Лемма 10. Пусть L – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами, такая что $W = L'L$ имеет гамма-распределение Беллмана с параметрами a и $A = I_d$. Тогда функция плотности матрицы L имеет вид

$$f_L(l) = \left(\prod_{j=1}^{d} 2\Gamma\left(\frac{2a_{d-j+1} - d + j}{2} \right)^{-1} l_{jj}^{(2a_{d-j+1}-d+j)-1} \exp\left(-l_{jj}^2\right) \right) \times$$

$$\times \left(\prod_{i \neq j} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-l_{ij}^2\right) \right),$$

где l_{ij} – элементы матричного аргумента l.

Доказательство. С учетом того, что модуль якобиана преобразования $W = L'L$ имеет вид $J(W, L) = 2^d \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^{j}$ (см. [3]), для функции плотности матрицы L имеем

$$f_L(l) = \pi^{-\frac{d(d-1)}{4}} \prod_{j=1}^{d} \Gamma\left(a_j - \frac{j-1}{2} \right)^{-1} \exp\left(-\sum_{j=1}^{d} l_{jj}^2 \right)$$

$$\exp\left(-\sum_{i \neq j} l_{ij}^2 \right) 2^d \prod_{j=1}^{d} l_{jj}^{2a_{d-j+1}-d-1+j} =$$

$$= \pi^{-\frac{d(d-1)}{4}} \exp\left(-\sum_{i \neq j} l_{ij}^2 \right) \exp\left(-\sum_{j=1}^{d} l_{jj}^2 \right) 2^d \, \Gamma\left(\frac{2a_1}{2} \right)^{-1}$$

$$\Gamma\left(\frac{2a_2 - 1}{2} \right)^{-1} \Gamma\left(\frac{2a_3 - 2}{2} \right)^{-1} \ldots \Gamma\left(\frac{2a_d - d + 1}{2} \right)^{-1} \times$$

$$\times\, l_{11}^{2a_d - d + 1 - 1} l_{22}^{2a_{d-1} - (d-1) + 1 - 1} l_{33}^{2a_{d-2} - (d-2) + 1 - 1} \ldots l_{dd}^{2a_1 - 1} =$$

$$= \pi^{-\frac{d(d-1)}{4}} \exp\left(-\sum_{i \neq j} l_{ij}^2 \right) \left(2\Gamma\left(\frac{2a_1}{2} \right)^{-1} l_{dd}^{2a_1 - 1} \exp\left(-l_{dd}^2\right) \right) \ldots$$

$$\ldots \left(2\Gamma\left(\frac{2a_d - d + 1}{2} \right)^{-1} l_{11}^{(2a_d - d + 1) - 1} \exp\left(-l_{11}^2\right) \right) =$$

$$= \left(\prod_{j=1}^{d} 2\Gamma\left(\frac{2a_{d-j+1} - d + j}{2} \right)^{-1} l_{jj}^{(2a_{d-j+1}-d+j)-1} \exp\left(-l_{jj}^2\right) \right) \times \left(\prod_{i \neq j} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-l_{ij}^2\right) \right).$$

Лемма 10 доказана.

Согласно Лемме 10, функция плотности распределения матрицы L распадается в произведение функций плотности ее элементов. Значит, элементы матрицы L распределены независимо. Диагональные элементы имеют функцию плотности

$$f_{l_{jj}}(l_{jj}) = 2\Gamma\left(\frac{2a_{d-j+1}-d+j}{2}\right)^{-1} l_{jj}^{(2a_{d-j+1}-d+j)-1} \exp\left(-l_{jj}^2\right), \tag{7}$$

соответствующую обобщенному гамма-распределению с параметрами $a=1,\ p=2,\ d=2a_{d-j+1}-d+j$. Элементы вне диагонали имеют функцию плотности

$$f_{l_{ij}}(l_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-l_{ij}^2\right), \tag{8}$$

то есть внедиагональные элементы имеют нормальное распределение $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Пусть матрица L удовлетворяет условиям Леммы 10, а вектор V имеет нормальное распределение $N(0, I_d)$. В работе [6] показано, что в этом случае вектор $Z = L^{-1}V$ имеет *t*-распределение с вектором степеней свободы с параметрами $\mu = 0,\ A = I_d,\ a$. Следовательно симулирование вектора Z, а значит и вектора X с произвольными μ и A, сводится к симулированию матрицы L. А по Лемме 10 симулирование матрицы L сводится к ее поэлементному независимому симулированию с функциями плотности (7) для диагональных элементов и (8) для внедиагональных. Это может быть легко реализовано на компьютере, поскольку симулирование обобщенного гамма-распределения (7) в настоящее время доступно во многих математических программных пакетах.

Таким образом, предлагается следующий способ симулирования набора $X^{(1)},...,X^{(N)}$ независимых случайных векторов, имеющих *t*-распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ, A, a. Для $k = 1,...,N$ независимо осуществляется следующая процедура.

1. В соответствии с функциями плотности (7) и (8) производится независимое поэлементное симулирование матрицы L, а также независимо симулируется стандартный нормальный вектор V.

2. Далее вектор $X^{(k)}$, имеющий t-распределение с вектором степеней свободы с параметрами μ, A, a, вычисляется как $X^{(k)} = PL^{-1}V + \mu$, где P – нижняя треугольная матрица, такая, что $A = PP'$.

Отметим, что Лемма 10 неверна для верхней треугольной матрицы L с положительными диагональными элементами, поскольку в этом случае $\left(L'L\right)_{[j]} \neq L'_{[j]}L_{[j]}$. Элементы верхней треугольной матрицы L с положительными диагональными элементами, такой, что $W = L'L$, имеют существенно более сложное распределение. В частности, в функциях плотности диагональных элементов этой матрицы возникает вырожденная (конфлюэнтная) гипергеометрическая функция второго рода (функция Трикоми).

Библиографический список

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, рядов и произведений. 7-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2011.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 3. Специальные функции. Дополнительные главы. 2-е изд. М.: Физматлит, 2003.
3. Шведов А.С. Бета-распределение случайной матрицы и его применение в модели состояние-наблюдение. Препринт WP2/2009/01. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2009.
4. Шведов А.С. К байесовскому анализу матричной линейной модели состояние-наблюдение. Препринт WP2/2012/01. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2012.
5. Шведов А.С. Робастная регрессия с применением *t*-распределения и EM-алгоритма // Экономический журнал Высшей школы экономики. 2011. № 1. С. 68–87.
6. Шведов А.С. *t*-распределение случайной матрицы и его применение в регрессионной модели. Препринт WP2/2010/01. М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2010.
7. Kotz S., Nadarajah S. Multivariate t Distributions and Their Applications. Cambridge University Press, 2004.
8. The Wolfram Functions Site. Gauss hypergeometric function 2F1: integral representations (formula 07.23.07.0002) (http://functions. wolfram.com/HypergeometricFunctions/Hypergeometric2F1/07/01/01/0002/.

9. The Wolfram Functions Site. Generalized hypergeometric function: Integral representations (formula 07.31.07.0001) (http://functions. wolfram.com/HypergeometricFunctions/HypergeometricPFQ/07/01/01/0001/).
10. The Wolfram Functions Site. Generalized hypergeometric function: Representations through more general functions (formula 07.31.26.0004) (http://functions.wolfram.com/HypergeometricFunctions/ HypergeometricPFQ/26/03/01/0001/).
11. The Wolfram Functions Site. Meijer G-function: Integration (formula 07.34.21.0090) (http://functions.wolfram.com/ HypergeometricFunctions/MeijerG/21/02/07/0007/).

Balaev, A. I. Moments of the multivariate *t*-distribution with vector of degrees of freedom, univariate marginal density functions and characteristic functions : Working paper WP2/2012/03 [Text] / A. I. Balaev ; National Research University "Higher School of Economics". – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2012. – 36 p. – 70 copies.

Theoretical properties of the multivariate t-distribution with vector of degrees of freedom are considered. Derived are the general formulae and conditions of the existence of moments, univariate marginal density functions and characteristic functions, and a simple simulation algorithm is proposed. The formula derived are illustrated with examples.

Препринт WP2/2012/03
Серия WP2
Количественный анализ в экономике

Балаев Алексей Иванович

Моменты многомерного *t*-распределения с вектором степеней свободы, одномерные маргинальные функции плотности и характеристические функции

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» с представленного оригинал-макета

Формат 60×84 $^{1}/_{16}$. Тираж 70 экз. Уч.-изд. л. 2,1

Усл. печ. л. 2,1. Заказ № . Изд. № 1513

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»
Тел.: (499) 611-24-15