

ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ван Цзян

**СРОЧНАЯ СТРУКТУРА
ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК
НА КИТАЙСКОМ РЫНКЕ ОБЛИГАЦИЙ**

Препринт WP16/2012/03

Серия WP16

Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Москва
2012

УДК 336.763.3(510)
ББК 65.262.2(5Кит)
В17

Редакторы серии WP16
«Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука»
С.Н. Смирнов, А.Г. Шоломицкий

В17 **Ван Цзян.** Срочная структура процентных ставок на китайском рынке облигаций : препринт WP16/2012/03 [Текст] / Ван Цзян ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2012. – 24 с. – 50 экз.

Данная статья посвящена проблеме построения срочной структуры процентных ставок на рынке облигаций КНР. В статье содержится обзор соответствующих исследований по данной теме за период с 1997 по 2010 г., а также приводится краткое описание и история официальной методики построения кривой доходности, используемой Центральным государственным депозитарием облигаций КНР.

УДК 336.763.3(510)
ББК 65.262.2(5Кит)

Ключевые слова: Китай, рынок облигаций, срочная структура процентных ставок, кривая доходности.

Ван Цзян – аспирант 3-го года обучения,
кафедра управления рисками и страхования,
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

Wang Jiang. Term Structure of Interest Rates in the China's Bond Market : Working paper WP16/2012/03 [Text] / Wang Jiang ; National Research University "Higher School of Economics". – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2012. – 24 p. – 50 copies (in Russian).

The paper is devoted to the issue of construction of the term structure of interest rates for China's bond market. It provides an overview of the related studies for the period from 1997 to 2010. The paper also gives a brief description and history of the approach applied by China Central Depository & Clearing (CCDC) in order to construct the yield curve out of the China's bond market data.

Key words: China, bond market, term structure of interest rates, yield curve.

Wang Jiang – Postgraduate student,
Chair of Risk-Management and Insurance
The National Research University "Higher School of Economics".

**Препринты Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» размещаются по адресу: <http://www.hse.ru/org/hse/wp>**

© Ван Цзян, 2012
© Оформление. Издательский дом
Высшей школы экономики, 2012

Введение

Известно, что рынок государственных облигаций играет существенную роль в развитии и функционировании экономики любой страны. Покупка и продажа облигаций является одним из ключевых инструментов денежно-кредитной политики центрального банка. Обыкновенной практикой финансирования дефицитного бюджета и реализации государственных инвестиционных проектов стали операции на открытом рынке.

Благодаря активному развитию теории финансовых рынков, появилось большое количество моделей, описывающих функционирование самых разных сегментов финансового рынка, в том числе и рынка государственных облигаций. Одним из направлений теории финансовых рынков является анализ срочной структуры процентных ставок. Данное направление включает в себя совокупность моделей, использующихся при теоретическом анализе финансовых рынков на макроэкономическом уровне, а также при практической работе на срочных рынках и рынках производных финансовых инструментов.

Данная работа посвящена изучению проблемы построения срочной структуры процентных ставок на китайском рынке облигаций. Для этого мы обсудим понятие срочной структуры процентных ставок; охарактеризуем подходы, разработанные для построения кривых доходностей на рынках западных стран; представим обзор соответствующих исследований китайских авторов, а также опишем современную практику построения срочной структуры процентных ставок на рынке облигаций КНР.

1. Кривая доходности

В области финансов кривая доходности – графическое изображение того, как изменяются процентные ставки в зависимости от сроков пога-

шения ценных бумаг на определенный момент времени. Продолжительность сроков обращения ценных бумаг откладывается по оси абсцисс, а показатели доходности к моменту погашения – по оси ординат. Кривые доходности постоянно изменяются, так как доходности ценных бумаг, учтенных в каждой кривой, варьируются ежедневно. Математическое описание этой зависимости – срочная структура процентных ставок.

Данная область является частью теории инструментов с фиксированной доходностью. Обычные примеры инструментов с фиксированной доходностью – это облигации и депозиты. Мы будем понимать под облигацией любое долговое обязательство, оформленное в виде рыночной ценной бумаги, платежи по которому определены в номинальных или реальных величинах. В связи с использованием государственных облигаций для макроэкономического планирования и валютной политики вопрос о создании точной модели срочной структуры процентных ставок уже более 30 лет исследуется в США и в странах Запада.

2. Западные исследования

В настоящий момент среди наиболее часто применяемых моделей на практике в Европе можно выделить два классических параметрических подхода: модель Нельсона – Зигеля (Nelson – Siegel, 1987) и модель Свенссона (Svensson, 1994). На самом деле, модель Свенссона является модификацией модели Нельсона – Зигеля.

Если рассмотреть статические исследования срочных структур процентных ставок, то непараметрические (сплайновые) методы более популярны в США и в Японии, сплайновый метод был предложен J. McCulloch. В работе McCulloch (1971) «Measuring the Term Structure of Interest Rates» автор предложил использовать квадратичные сплайны. Недостаток этого подхода в излишних колебаниях форвардной кривой доходности. Чтобы избежать этих колебаний, он увеличивал порядок

функций, составляющих сплайн. Далее данный подход был расширен I.A. Cooper (1976) и G.S. Shea (1984). В 1991 г. J. Stelly предложил метод, основанный на B-сплайнах. В 1995 г. Fisher, Nychka и Zervos предложили использовать сглаживающие сплайны: они предложили добавлять так называемый штраф за негладкость для оптимизации целевой функции, которая контролирует гладкость и параметры метода *general-cross-validation*. В 1997 г. Waggoner предложил использовать различные штрафы за негладкость для различных сроков. Anderson и Sleath сделали шаг вперёд: они использовали непрерывную функцию для представления гладкости параметров.

3. Китайские исследования кривой доходности облигаций

В последние годы рынок облигаций Китая интенсивно развивался. Объем выпуска облигаций в конце 2011 г. достиг 6962,51 млрд китайских юаней (CNY), а объем торговли в 2011 г. достиг 67758,55 млрд китайских юаней (CNY). Но в Китае литературы об исследовании теории срочной структуры процентных ставок сравнительно немного, что обуславливает актуальность темы.

В 1997 г. Ян Дакай и Ян Яун первоначально указали, что исследования кривой доходности казначейских облигаций стали одним из центральных вопросов в области финансов в Китае. В своей статье «About the Research on China's Bond Market Yield Curve» китайские исследователи впервые использовали данные SSE (Шанхайская фондовая биржа) по облигациям (31 декабря 1996 г., 21 февраля и 11 апреля 1997 г.) для построения кривой доходности облигаций на рынке ценных бумаг Китая.

Ян Дакай и Ян Яун использовали фундаментальную формулу для ценообразования облигаций:

$$P = \sum_{t=1}^n \frac{C}{(1+y)^t} + \frac{F}{(1+y)^n}$$

где P – цена облигации, C – купонный платёж, F – номинальная цена облигации, y – доходность облигации, n – срок погашения.

Они выбрали семь казначейских облигаций для вычисления доходности. На графике они отметили точки, отражающие доходность и срок до погашения каждой облигации. Ян Дакай и Ян Яун получили кривую доходности с помощью линейной интерполяции.

Яо и Лян в 1998 г. также выбрали шесть облигаций из Шанхайской биржи и получили шесть точек после вычисления с помощью фундаментальной формулы для ценообразования облигации. Получив свою кривую, Яо и Лян в первый раз сделали макроэкономический анализ для финансовой среды с помощью кривой доходности.

В 2004 г. У. Янь (Wu Yan) в своей работе предположила, что вычисление доходности является сложным процессом, поэтому для вычисления можно использовать финансовый калькулятор или использовать следующую упрощенную формулу:

$$y = \frac{C + (F - P)/T}{(F + P)/2}$$

Она выбрала восемь казначейских облигаций 26 декабря 2002 г., 2 апреля и 22 октября 2003 г. и построила три срочных структуры процентных ставок линейной интерполяцией по этим восьми точкам. В результате она отметила, что, несмотря на то, что кривые доходности сильно колебались, они имели возрастающую тенденцию. Кроме того, неправильная форма кривой доходности показала, что рынок облигаций в Китае был несовершенным и незрелым в то время. Для развития рынка она предложила увеличить число типов облигаций или выпуск производных на облигации.

Чжэн и Линь (Zhang Zheng-ling, Lin Hai, 2003) отдельно использовали метод Bootstrapping и сплайновый метод для оценки доходности. Их сплайновая формула:

$$f_1(m) = \begin{cases} m - \frac{1}{2d_2}m^2, 0 \leq m \leq d_2 \\ \frac{1}{2}d_2, d_2 < m < m_n \end{cases}$$

$$f_j(m) = \begin{cases} 0, 0 < m < d_{j-1} \\ \frac{(m - d_{j-1})^2}{2(d_j - d_{j-1})}, d_{j-1} \leq m \leq d_j, j = 2 \dots k - 1 \\ \frac{1}{2(d_j - d_{j-1})} + (m - d_j) - \frac{(m - d_j)^2}{2(d_{j+1} - d_j)}, d_j < m \leq d_{j+1} \\ \frac{1}{2(d_{j+1} - d_{j-1})}, d_{j+1} \leq m \leq m_n \end{cases}$$

$$f_k(m) = \begin{cases} 0, 0 \leq m \leq d_{k-1} \\ \frac{(m - d_{k-1})^2}{2(m_n - d_{k-1})}, d_{k-1} < m \leq m_n \end{cases}$$

где $d_j = m_1 + \theta(m_{1+1} - m_1)$, $m_1 = \frac{[j-1]}{k-1}$, $\theta = \frac{(j-1)n}{k-1} - m_1$.

На практике они использовали реальные данные от 13 декабря 2002 г. из Шанхайской биржи при ситуации, когда $k = 3$ и $k = 4$ для сплайнового метода. В результате выводы следующие: оценка метода Bootstrapping и оценка сплайнового метода при $k = 4$ очень близки, поэтому эти оценки ближе к реальности. Но при $k = 3$ оценки сплайнового метода были относительно хуже, чем прежние.

Ян и Ли (Yang, Li, 2004) начали объединять кубический сплайн и обобщённый метод Bootstrapping для построения кривой доходности для казначейских облигаций.

Они определили, что существуют K облигаций. И i -я облигация описывается как $B_i = [n_i, C_i, t_i, P_i]$, $i = 1, \dots, K$, где n_i – количество

купонных платежей, C_i – купонная цена, вектор времени купонных оплат: $t_i = [t_{i,1}, \dots, t_{i,n_i}]$ и $t_{1,n_1} < t_{2,n_2} < \dots < t_{K,n_K}$.

Таким образом, фундаментальная формула для ценообразования облигации преобразуется в следующую формулу:

$$P_i + A_i = \sum_{j=1}^{n_i} C_i \exp(-r_j * t_{i,j}) + F_i \exp(-r_{n_i} * t_{i,n_i}), i = 1, \dots, K$$

где P_i – чистая цена, A_i – начисленные проценты с даты последнего платежа на текущую дату, F_i – номинальная цена, и r_j – мгновенная процентная ставка в момент t_j .

Если количество неизвестных мгновенных процентных ставок N равняется K , то задача решается с помощью традиционного bootstrap-метода, но если N больше чем K , то задача решается с помощью дополнительных уравнений. Они выбрали функции кубической интерполяции:

$$CS(t) = \begin{cases} RA_1 T, t \leq t_{2,n_2} \\ RA_2 T, t_{2,n_2} \leq t \leq t_{3,n_3} \\ RA_3 T, t_{3,n_3} \leq t \leq t_{4,n_4} \\ \dots \\ \dots \\ RA_{K-1} T, t_{K-1,n_{K-1}} \leq t \leq t_{K,n_K} \end{cases}$$

где $R = [r_1, r_2, \dots, r_K]$ доходности этих K облигаций и

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i,1,1} & a_{i,1,2} & a_{i,1,3} & a_{i,1,4} \\ a_{i,2,1} & a_{i,2,2} & a_{i,2,3} & a_{i,2,4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,k,1} & a_{i,k,2} & a_{i,k,3} & a_{i,k,4} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \dots, K-1, T = [1, t, t^2, t^3]'$$

Используя объединенные уравнения формулы ценообразования и сплайновые функции $CS(t)$, можно решить проблему традиционного метода bootstrap.

На практике Ян и Ли использовали данные от 21 января 2002 г. и 21 марта 2002 г. из Шанхайской биржи и получили свою кривую. В результате они нашли, что у кривых доходностей по облигациям со сро-

ком погашения 4–10 лет были сильные колебания. На самом деле в это время большинство китайских казначейских облигаций имели срок погашения 5–10 лет. Подробные методики также сделали Тань, Су и Ху (Tan, Su, Hu, 2004).

В 2003 г. Чжу Фэн (Zhu Feng, 2003) в своей работе сравнил известные параметрические методы, такие как модель Нельсона – Зигеля и модель Свенссона, со сплайновыми. Чтобы сравнить параметрические и сплайновые методы, Чжу Фэн формализовал функции ценообразования облигации следующим образом:

$$B_j = \sum_{m=1}^{N_j} C_j(t_m) \exp\left(-t_m \sum_{i=1}^k b_i g_i(t_m)\right) + \varepsilon_j$$

где C_j – денежный поток по облигации номера j , t_m – срок погашения после m раз купон платёжки, $g_i(t_m)$ – приближение функции, которая зависит от t_m , b_i – неопределенные коэффициенты. Для выбора $g_i(t_m)$ Чжу Фэн предложил использовать В-сплайновый метод, который также широко используется после 90-х годов (например, модель Fisher – Nychka – Zervos (FNZ) была создана на базе В-сплайнов). s -я сплайновая функция $g_s(t)$ может быть записана так:

$$g_s(t) = \sum_{i=s}^{s+4} \left(\prod_{j=s, j \neq i}^{s+4} \frac{1}{T_j - T_i} \right) [\max(t - T_j, 0)]^3$$

Чжу Фэн разделил реальные торговые данные облигации из Шанхайской биржи на две части. Первая часть: данные за период 30.08.2001–8.10.2002 гг.; вторая часть: данные от 9 октября 2002 г. по 29 января 2003 г. Затем он отдельно построил кривые доходности казначейских облигаций, используя модель Свенссона и модель FNZ.

Автор сравнил эти два метода с помощью показателей среднеквадратической ошибки (RMSE): $RMSE = \sqrt{\sum_{j=1}^N (\hat{B}_j - B_j)^2 / N}$ и средней

абсолютной ошибки (MAE): $MAE = \sum_{j=1}^N \frac{|\widehat{B}_j - B_j|}{N}$. Результаты: две модели были близки, но обе имели чрезмерную точность (overfitting).

Сравнив с кривыми доходностями развитого рынка облигации, Чжу Фэн указал, что получил значительный разрыв из-за данных Шанхайской фондовой биржи. На биржевом рынке было недостаточное количество типов казначейских облигаций.

В работе Тан и Чжу (Tang, Zhu, 2003) используется метод главных компонент (PCA) для построения кривой доходности. Авторы предположили, что изменения кривой доходности в основном объясняются тремя компонентами: уровнем (41,67%), наклоном (32,29%) и кривизной (16,88%). Чжан и Сюй (Zhang, Xu, 2006) использовали метод главных компонент для исследования кривой доходности на реальных данных китайского рынка за 2004 г. и выяснили, что колебание облигаций, у которых срок до погашения средний, относительно больше, чем у краткосрочных и долгосрочных. Они утверждают, что метод главных компонент может упростить исследование изменений кривой доходности и помогает понять срочную структуру процентных ставок.

Чжэнь и Ли (Chen, Li, 2005) сравнили метод McCulloh, подход на основе B-сплайнов и модель Nelson – Siegel, после сравнения они заключили, что у метода McCulloh недостаточная степень точности, но он менее чувствителен к выбросам в данных. Поэтому они на базе метода McCulloh разделили все облигации на две части: облигации менее трех месяцев и облигации, у которых до погашения больше чем три месяца.

Таким образом, функция дисконтирования описывается следующим образом:

$$D(t) = \begin{cases} a_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2, & t \leq 0.25 \\ a_0 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2, & t > 0.25 \end{cases}$$

Более того, Чжэнь и Ли предположили, что цена дисконтной функции равняется 1 при $t = 0$. То есть

$$D(t) = \begin{cases} 1 + \hat{a}_1 t + \hat{a}_2 t^2, & t \leq 0.25 \\ \left(1 - \frac{1}{16} \hat{a}_2 + \frac{1}{16} \hat{b}_2\right) + \left(\hat{a}_1 + \frac{1}{2} \hat{a}_2 - \frac{1}{2} \hat{b}_2\right) t + \hat{b}_2 t^2, & t > 0.25 \end{cases}$$

Подставляя дисконтный фактор в уравнение ценообразования облигации ($\hat{P} = \sum_{i=1}^n C_i D(t)$) была получена следующая модель:

$$\begin{aligned} \hat{P} - \sum_t C_t &= a_1 \left(\sum_{t \leq 0.25} C_t t + \sum_{t > 0.25} C_t t \right) \\ &+ a_2 \left(\sum_{t \leq 0.25} C_t t^2 - \frac{1}{16} \sum_{t > 0.25} C_t t + \frac{1}{2} \sum_{t > 0.25} C_t t \right) \\ &+ b_2 \left(\frac{1}{16} \sum_{t > 0.25} C_t t - \frac{1}{2} \sum_{t > 0.25} C_t t + \sum_{t > 0.25} C_t t^2 \right) \end{aligned}$$

Функцию дисконтирования можно оценить с помощью метода наименьших квадратов. Чтобы удовлетворять требованиям независимых и одинаковых распределений, Чжэнь и Ли использовали подход Vasicek, они определили:

$$\omega^2 = \frac{D^2 P}{(1 + r(t))^2}$$

где D – срок до погашения облигации и $r(t)$ – внутренняя норма доходности. Далее они использовали формулу $D(t) = (1 + R_t)^{-t}$ и получили мгновенную процентную ставку.

Ван и Чжан (Wang, Zhang, 2006) в своей работе сделали подробный анализ и предположили, что дисконтная функция имеет следующий вид:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) = \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2 + \delta_1 t^3, t \in [0, t_1] \\ F_2(t) = \alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2 + \delta_2 t^3, t \in [t_1, t_2] \\ \dots \dots \\ F_i(t) = \alpha_i + \beta_i t + \gamma_i t^2 + \delta_i t^3, t \in [t_i, t_j] \\ \dots \dots \end{cases}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ – неизвестные параметры, которые следует оценивать. Чтобы обеспечить непрерывность кусочно заданных функций, были наложены следующие ограничения:

$$F_i(t_i) = F_{i+1}(t_i), F'_i(t_i) = F'_{i+1}(t_i), F''_i(t_i) = F''_{i+1}(t_i)$$

и $F_1(0) = 1$. Таким образом, связь между ценой облигации и мгновенной процентной ставкой можно записать так:

$$P = \frac{C}{(1 + ty_t)} + \frac{C}{(1 + ty_{t+1})(1 + y_{t+1})} + \dots + \frac{C}{(1 + ty_{t+i})(1 + y_{t+i})} + \dots + \frac{C}{(1 + ty_n)(1 + y_{t+n})}$$

или $P = CF(t) + CF(t + 1) + \dots + CF(t + i) + \dots + (C + M)(t + n)$

На практике авторы выбрали данные 10 октября 2005 г. и разделили функцию $F(t)$ на три части:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) = \alpha_1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2 + \delta_1 t^3, t \in [0,3] \\ F_2(t) = \alpha_2 + \beta_2 t + \gamma_2 t^2 + \delta_2 t^3, t \in [3,5] \\ F_3(t) = \alpha_3 + \beta_3 t + \gamma_3 t^2 + \delta_3 t^3, t \in [5,10] \end{cases}$$

Так как $F(0) = 1$, они получили, что $\alpha_i = 1$ и:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) = 1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2 + \delta_1 t^3, t \in [0,3] \\ F_2(t) = 1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2 + \delta_1 [t^3 - (t - 3)^3] + \delta_2 (t - 3)^3, t \in [3,5] \\ F_3(t) = 1 + \beta_1 t + \gamma_1 t^2 + \delta_1 [t^3 - (t - 3)^3] + \delta_2 [(t - 3)^3 - \delta_2 (t - 5)^3] + \delta_3 (t - 5)^3, t \in [5,10] \end{cases}$$

Неизвестные параметры можно найти с помощью множественной линейной регрессии. Авторы использовали обобщенный метод наименьших квадратов и получили следующие результаты:

$$\beta_1 = -0.0598, \gamma_1 = 0.0197, \delta_1 = -0.00307, \delta_2 = 0.00154, \delta_3 = 0.00131$$

Подставив эти значения параметров в формулу для $F(t)$ и используя связь между функцией дисконтирования и бескупонной процентной ставкой: $R(t) = -\frac{1}{t} \ln[F(t)]$, Чжэнь и Ли построили свою срочную структуру процентных ставок. С помощью этой кривой они показали, что долгосрочная кривая доходности стремится к горизонтальной асимптоте. Ли и Мао (Li, Мао, 2008) в своей работе также разделили функцию на две части:

$$\begin{cases} D_1(t) = a_1 + a_2 t + a_3 t^2 + a_4 t^3, & t \in [1, 5] \\ D_2(t) = b_1 + b_2 t + b_3 t^2 + b_4 t^3, & t \in [5, 20] \end{cases}$$

Так как $\begin{cases} D_1^{(i)}(n) = D_2^{(i)}(n) \\ D_1^{(i)}(t) = 1 \end{cases}$, согласно предыдущим работам,

$a_1 = 1, b_1 = 1$ и цену облигации можно записать так:

$$P_1 = \sum_{N=1}^5 C(5) + \sum_{N=1}^5 C(5)a_2 t + \sum_{N=1}^5 C(5)a_3 t^2 + \sum_{N=1}^5 C(5)a_4 t^3$$

или $P_1 = x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$

$$\begin{aligned} P_2 = & \sum_{N=5}^{20} C(5) + \sum_{N=5}^{20} C(5)a_2 t + \sum_{N=5}^{20} C(5)a_3 t^2 + \sum_{N=5}^{20} C(5)a_4 [t^3 - (t-5)^3] \\ & + \sum_{N=5}^{20} C(5)b_4 (t-5)^3 \end{aligned}$$

Используя линейный регрессионный анализ, Ли и Мао получили:

$P - x_1 = -0.04964480293x_2 + 0.0049328018x_3 - 0.0005333643134x_4$
с коэффициентами $R^2 = 0.972239, \bar{R} = 0.969715$.

Таким образом, функция дисконтирования записывается как

$$\begin{cases} D_1(t) = 1 - 0.04964480293t + 0.0049328018t^2 + \\ \quad + - 0.0005333643134t^3, \quad t \in [1,5] \\ D_2(t) = 1 - 0.04964480293t + 0.0049328018t^2 - \\ \quad - 0.0005333643134t^3 \\ \quad + 0.00949553(t - 5)^3 t \in [5,20] \end{cases}$$

Шао и Ян (R.P. Shao, J.X. Yang, 2008) в своей работе использовали формулу McCulloch дисконтной сегментации: $\tau_j = T_{h_j} + \theta_j (T_{h_{j+1}} + T_{h_j})$,

где $h_j = \left[j * \frac{M}{K} - h_j \right]$, $j = 1, 2, \dots, k - 1$, M – количество облигаций, N – количество отрезков. На практике они выбрали 28 облигаций от 13 марта 2008 г., поэтому здесь $K = \lceil \sqrt{28} \rceil = 5$, функция дисконтирования: $B(s, t) = f(s - t, \vec{\beta})$, где вектор $\vec{\beta}$ можно записать так:

$$B_0(t) = d_0 + c_0 t + b_0 t^2 + a_0 t^3, t \in [0.000, 1.298]$$

$$B_1(t) = d_1 + c_1 t + b_1 t^2 + a_1 t^3, t \in [1.298, 2.738]$$

$$B_2(t) = d_2 + c_2 t + b_2 t^2 + a_2 t^3, t \in [2.738, 3.694]$$

$$B_3(t) = d_3 + c_3 t + b_3 t^2 + a_3 t^3, t \in [3.694, 7.734]$$

$$B_4(t) = d_4 + c_4 t + b_4 t^2 + a_4 t^3, t \in [7.734, 15.100]$$

Используя схожий процесс для сокращения количества неизвестных параметров, было получено, что

$$B_0(t) = 1 + c_0 t + b_0 t^2 + a_0 t^3, t \in [0.000, 1.298]$$

$$B_1(t) = 1 + c_0 t + b_0 t^2 + a_0 t^3 + a_1 (t - 1.298)^3, t \in [1.298, 2.738]$$

$$B_2(t) = 1 + c_0 t + b_0 t^2 + a_0 t^3 + a_1 (t - 1.298)^3 + a_2 (t - 2.738)^3, t \in [2.738, 3.694]$$

$$B_3(t) = 1 + c_0 t + b_0 t^2 + a_0 t^3 + a_1 (t - 1.298)^3 + a_2 (t - 2.738)^3 + a_3 (t - 3.694)^3, t \in [3.694, 7.734]$$

$$B_4(t) = 1 + c_0 t + b_0 t^2 + a_0 t^3 + a_1 (t - 1.298)^3 + a_2 (t - 2.738)^3 + a_3 (t - 3.694)^3 + a_4 (t - 7.734)^3, t \in [7.734, 15.100]$$

Упрощённо уравнение цены облигации можно записать так:

$$P_t = M + x_1 c_0 + x_2 b_0 + x_3 a_0 + x_4 a_1 + x_5 a_2 + x_6 a_3 + x_7 a_4 + \mu_i$$

Решив это уравнение с помощью метода наименьших квадратов, Шао и Ян получили свою модель. В LM-тесте (тест множителей Лагранжа) $R^2 = 0.998625$, поэтому авторы утверждают, что точность их модели высокая, хотя существуют некоторые отклонения для некоторых реальных облигаций. Подробный метод также реализовал Чжэн (Cheng, 2010).

Чжэнь и Шэнь (Chen, Shen, 2006) в своей работе использовали модель Нельсона – Зигеля для функции мгновенной форвардной процентной ставки облигации:

$$f(t) = \beta_0 + \beta_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + \beta_2 \left(\frac{t}{\tau_1}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)$$

То есть функция мгновенной процентной ставки облигации записывается как

$$\begin{aligned} R(t) &= \frac{\int_0^t f(s) ds}{t} \\ &= \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}} \right] \\ &\quad + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \right] \end{aligned}$$

В модели существуют четыре параметра: $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1$. Чжэнь и Шэнь рассматривали эти параметры как переменные величины и использовали их, чтобы найти эмпирическое значение процентной ставки. Затем они минимизировали следующую целевую функцию для определения параметров $\beta_0, \beta_1, \beta_2$:

$$J = \sum_{i=1}^n \omega_i (P_i^{mdl} - P_i^{mkt})^2$$

где n – количество облигаций, P_i^{mdl} – теоретическая цена i -й облигации, P_i^{mkt} – соответствующая рыночная цена. ω_i – вес i -й облигации.

В этой модели они положили вес облигации обратно пропорциональным дюрации, что дало больший вес краткосрочным облигациям.

Чжэнь и Ли предположили, что если $y_t(\tau)$ – доходность казначейской облигации в момент t , у этой облигации срок до погашения τ и прогнозируемая доходность $\hat{y}_{t+h/t}$.

Далее они сравнили две модели прогнозирования: модель случайного блуждания $\hat{y}_{t+h/t} = y_t(\tau)$, которая предполагает, что лучший прогноз процентной ставки остается неизменным, и модель авторегрессии (AR(1)) $\hat{\beta}_{i,t+h/t} = \hat{c}_i + \hat{\gamma}_i \hat{\beta}_{it}$, $i = 1, 2, 3$.

На практике Чжэнь и Шэнь использовали данные по 698 дням из Шанхайской биржи с 4 января 2002 г. по 29 декабря 2004 г. и различные шаги $h = 1, h = 30, h = 60, h = 90$ дней.

Средняя абсолютная ошибка (MAE) модели Нельсона – Зигеля для 698 торговых дней получилась 2.39961 CNY, а средний квадрат ошибки в цене (MSE) – 0.02951 CNY. Соответственно, средняя абсолютная ошибка модели AR(1) – 8.58E-06 и средний квадрат ошибки в цене – 4E-05.

Чжэнь и Шэнь показали очевидное превосходство модели AR(1). Кроме того, по результату сравнения MAE и MSE для разных шагов h Чжэнь и Шэнь указали, что минимум MAE и MSE достигается при $h = 90$.

В работе Ван и Цянь (Wang, Qian, 2009) были построены кривые доходности, далее авторы использовали различные мгновенные процентные ставки для оценки колебания и риска рыночной цены в гауссовском методе НЖМ.

В работе Су, Яо и Ли (Su, Yao, Li, 2011) проведена оценка параметров некоторого обобщения модели Нельсона – Зигеля при помощи генетических алгоритмов.

Модель Нельсона – Зигеля оценки мгновенной процентной ставки облигаций можно записать в таком виде:

$$\begin{aligned}
 R(t) &= \frac{\int_0^t f(s)ds}{t} \\
 &= \beta_0 + \beta_1 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right)}{\frac{t}{\tau_1}} \right] \\
 &\quad + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right)}{\frac{t}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \right]
 \end{aligned}$$

То есть цена облигации

$$P + A = \sum_{i=1}^n C \exp(-r_i * d_i) + F \exp(-r_n * d_n)$$

где P – чистая цена облигации, A – накопленный процентный доход, C – цена купона, F – номинальная стоимость облигации, n – количество остаточных платежей купона, r_i – доходность, d_i – функция дисконтирования. Су, Яао и Ли указали, что часто используются нелинейные алгоритмы со строгими ограничениями для поиска вектора параметров: $\beta = [\beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2]$, которые оказываются слишком чувствительными и нестабильными, более того, эти методы часто находят локальные решения, и это влияет на глобальную точность.

Сначала Су, Яао и Ли предположили, что целевая функция для оценки вектора β : $\hat{\beta}$, записывается следующим образом:

$$fitness(\hat{\beta}) = \sum_{i=1}^N (\omega_i \epsilon_i)^2, \omega_i = \frac{1/D_i}{\sum_{j=1}^N 1/D_j}, \epsilon_i = \hat{P}_i - P_i$$

где N – количество облигаций, D_i – дюрация Маколея, \hat{P}_i – оценка цены, веса $\omega_i = \frac{1}{N}$. Для минимизации этой функции необходимо следующее условие:

$$\begin{aligned}
 0 \leq R(\tau_{\min}), 0 \leq R(\infty), \exp[-R(\tau_k), \tau_k] \geq \exp[-R(\tau_{k+1}), \tau_{k+1}] \quad \forall \tau_k \\
 < \tau_{\max},
 \end{aligned}$$

тогда генетический алгоритм можно записать в следующем виде:

$$\hat{\beta}^* = \min_{\beta} \text{fitness}(\beta)$$

Су, Яо и Ли отметили, что по сравнению с традиционными оптимальными методами, генетический алгоритм уменьшает объем вычислений и делает результат более стабильным. Они сделали эмпирическое сравнение метода bootstrap на базе кубической интерполяции, метода Нельсона – Зигеля и генетического алгоритма. Их результаты показывают, что у последнего метода качество оценки кривой доходности выше. Они использовали этот метод на реальных данных и показали, что кривая доходности имеет значительные различия в начальной стадии финансового кризиса, в промежуточной стадии и в конце на основе данных последнего финансового кризиса.

4. История и официальный метод центрального государственного депозитария облигаций

Если мы рассмотрим методику построения кривой бескупонной доходности, используемую Центральным государственным депозитарием облигаций (CCDC), то можно выделить три этапа:

1) Исследовательский этап (1999–2001): CCDC совместно с компанией Reuters создали первую в Китае официальную модель кривой доходности. Исходными данными были данные по сделкам. Котировки, хотя они и доступны, использованы не были.

2) Этап разработки (2002–2005): четыре типа кривых доходностей государственных облигаций были разработаны CCDC. На этом этапе применялся метод интерполяции полиномами второй степени. В качестве исходных данных использовались цены сделок, котировки и экспертные оценки. В то же время на разных рынках появились различные методы оценки кривой доходности по государственным облигациям.

3) Сравнительно развитый этап (2006 – текущий момент): CCDC использует несколько разных кривых доходностей: кривая доходности к погашению, кривая мгновенных процентных ставок и некоторые другие. В настоящее время эта тематика является предметом интенсивного изучения.

В текущий момент Китайский центральный государственный депозитарий облигаций пользуется следующим алгоритмом для построения кривой бескупонной доходности.

Шаг 1: Метод Bootstrapping

Шаг 2: Фильтрация полученных точек

Шаг 3: Сравнение с экспертными оценками и историческими данными

Шаг 4: Приближение методом Эрмита

Если погашения $0 = x_1 \leq x_2 = 30$ лет, (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) известны, $i, i + 1 \in [1, 30] \forall x_1 \leq x \leq x_n$, то функцию доходности можно записать так:

$$y(x) = y_i H_1 + y_{i+1} H_2 + d_i H_3 + d_{i+1} H_4$$

где

$$H_1 = 3 \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 - 2 \left(\frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} \right)^3,$$

$$H_2 = 3 \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^2 - 2 \left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right)^3,$$

$$H_3 = \frac{(x_{i+1} - x)^2}{x_{i+1} - x_i} - \frac{(x_{i+1} - x)^3}{(x_{i+1} - x_i)^2},$$

$$H_4 = \frac{(x - x_i)^3}{(x_{i+1} - x_i)^2} - \frac{(x - x_i)^2}{x_{i+1} - x_i}, d_j = y' (x_j)$$

Для исследования и построения таких кривых бескупонных доходностей используются следующие данные:

- (1) Цены сделок, заключенных на внебиржевом рынке облигаций.
- (2) Котировки покупки и продажи межбанковского рынка.

Заключение

Последние 10 лет китайская экономика, и ее финансовая система в частности, стремительно развиваются, поэтому рынок облигаций Китая представляет собой интересный и актуальный объект исследования. В данной работе был представлен обзор исследования построения кривой доходности на китайском рынке облигаций и, в том числе, официальный метод центрального государственного депозитария облигаций КНР. Представленный обзор показывает, что в основном предметом исследований китайских авторов является приложение западных методик построения кривых бескупонной доходности к данным о сделках на рынке облигаций Китая.

Для более точной и экономически осмысленной оценки кривой бескупонной доходности на рынке облигации КНР необходимо глубокое исследование свойств и особенностей этого рынка, в частности структуры рынка, механизма его функционирования, состава эмитентов и участников рынка и т.д. Эти направления являются логическим продолжением данной работы и предметом изучения наших дальнейших исследований.

Литература

1. Nelson C.R., Siegel A.F. Parsimonious Modeling of Yield Curves [J] // *Journal of Business*. 1987. No. 60. P. 473–489.
2. Svensson L. Estimating Forward Interest Rates with Extended Nelson-Siegel Method, Sveriges Riskbank // *Quart. Rev.* 1995. No. 3. P. 13–26.
3. McCulloch J. Measuring the Term Structure of Interest Rates [J] // *Journal of Business*. 1971. 44 (1). P. 19–31.
4. McCulloch J. The Tax Adjusted Yield curve // *Journal of Finance*. 1975. No. 30. P. 811–829.
5. Shea G. Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data // *Journal of Finance*. 1984. *Quant. Anal* 19. P. 253–269.
6. Steeley J. Estimating the Gilt-Edged Term Structure: Basis Splines and Confidence Intervals // *Journal of Business*. 1991. P. 513–529.

7. Fisher M., Nychka D., Zervos D. Fitting the Term Structure of Interest of Interest Rates with Smoothing Splines in Working Paper" Finance and Economics Discussion Series, 1995 (Federal Reserve Board, Washington, DC).
8. Waggoner D. Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper, 1997. P. 1-23.
9. Lapshin V.A. On Determination of the Time Structure of Interest Rates // Collection of Articles of Young Scientists of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics of the Moscow State University (MAKS Press, Moscow, 2006). No. 3. P. 92-98.
10. Yang Da-kai, Yang Yong. 关于我国国债收益率曲线的研究. (About the research on China's bond market yield curve [J]) // Journal of Finance and Economics. 1997. Vol. 7. P. 14-19.
11. Yao Chang-hui, Liang Yue-jun. 我国国债收益率曲线的实证研究. (Positive research on China's bonds' yield curve) // Journal of Financial Research. 1998. Vol. 08. P. 12-18.
12. Zhang Zheng-ling, Lin Hai. 中国市场利率期限结构的静态估计. (Static Approximation of China's interest rate term structure) // The Journal of Wuhan Finance. 2003. Vol. 25. P. 28-37.
13. Yang Bao-chen, Li Biao. 基于广义息票剥离法的国债收益率曲线的估计. (Estimation on Treasury Bond Yield Curve with Generalized Bootstrap Method [J]) // Chinese Journal of Management Science. 1003-207(2004)06-0001-05. 2004. Vol. 12. No. 6.
14. Xu Ying-wu. 四次 B-样条法构造国债收益率曲线. (Four-degree B-spline method for constructing theoretical treasury yield curve [J]) // Journal of Hefei University of Technology. 1003-5060(2006)05-0606-03. 2006. Vol. 19. No. 3.
15. Fang Yong, Shuai Mei, Lin Zhi-hang. 一种 G2 连续 Hermite 样条的构造方法. (A Method for Constructing Hermite Spline of G2 Continuation) // Mechanical Science and Technology. 1003-8728(2000)03-0386-03. 2000. Vol. 19. No. 3.
16. Tan Zheng-xun, Su Gui-fu, Hu Zong-yi. 我国国债零息票收益率曲线的构造. (Method for constructing China's Zero-coupon yield curve) // Statistics and Decision. TJJYC200405042. 2004. P. 74-75.
17. Wang Jian-qiang, Zhang Pu. 基于国债的零息票收益率曲线. (Zero-coupon Yield Curve Based on Treasury [J]) // Journal of Huaihua University. 1671-9743(2006)02-0086-03. 2006. Vol. 25. No. 2.
18. He Guo-sheng, Deng Xiao-zhuo. 零息票债券收益率曲线的理论推导及在中国的实践. (Theory Review and Practice Thinking on Zero Coupon Bond's Yield Curve for China [J]) The Theory and Practice of Finance and Economics. 1003-7217(2005)02-0074-05. 2005. Vol. 26. No. 134.

19. *Zhu Feng*. 国债即期收益率曲线的拟合估计. (Estimates of Treasures Yield Curve) Securities Market Herald. ZQSCDB20030407. 2003. P. 31–36.
20. *Liu Yanxiao*. 债券市场的收益率曲线应用分析. (Analysis of Bond Market Yield Curve) Technology and Market. 2009. Vol. 16. No. 4. P. 5–7.
21. *Chen Xiaoxian*. 中国债券利率期限结构研究. (Research into Interest Term Structure of Chinese Bond Market).1008-1569(2008)06-0112-11. 2008 P. 112–122.
22. *Su Yun-pen , Yang Bao-chen , Li Dong*. 基于遗传算法的扩展 Nelson-Siegel 模型及实证研究. (Empirical Research on Extended Nelson-Siegel Model Based on Genetic Algorithm) // Statistics & Information Forum. 1007-31161201101-0015-05. 2011. Vol. 26. No. 1. P. 17–19.
23. *Wang Yun-xiang, GaoXin-bo*. 我国国债利率期限结构研究. (A Study on Term Structure of Interest Rate of National Debt in China) // Xinjiang Finance.1007-8576(2006)01-0041-03. 2006. Vol. 1. P. 41–44.
24. *Chen Wei, Li Yi-jun*. 人民币收益率曲线构建研究. (On the Construction of Yield Curve for RMB) // Systems Engineering. 1001-4098(2005)11-0034-04. 2005. Vol. 23. No. 11. P. 33–37.
25. *Wang Ke-feng, Qian Xiao-hui*. 收益率曲线的提取及在 Gaussian HJM 模型参数估计中的应用. (The Extracting of Yield Curves and Its Application in the Parameter Estimation of Gaussian HJM Model) // Science and Technology Information. 2009. Vol. 5. P. 12–13.
26. *Wu Yan*. 我国国债收益率曲线的实证分析. (Positive Analysis on the Income Rates Curve of Public Debt of China) // Journal of Inner Mongolia Finance and Economics College. 1004-5295(2004)03-0044-04. 2004. Vol. 3. P. 44–47.
27. *Zhang Zhong-yu, Xutao*. 零息收益率曲线期限结构变化的主成分分析. (PCA on the Term Structure of Zero-coupon Yield Rates) // Statistics & Information Forum. 1007-3116(2006)01-0097-04. 2004. Vol. 21. No. 1. P. 44–47.
28. *Jin Bin, Jiang Xiao-dong*. 中国国债收益率曲线的构造-基于利率期限结构的实证研究(On the Structure of Return Rate Curve of National Debt in China: Authentic Proof Research on Term Structure Based on Interest Rate) // Journal of Inner Mongolia Finance and Economics College. 1004-5295(2003)-0045-05. 2003. Vol. 3. P. 45–49.
29. *Yu Jin*. 中国国债收益率曲线研究. (China's National Debt Yield Curve Analysis and Countermeasures) // Journal of Contemporary Asia-Pacific Studies. 2004. Vol. 11. P. 47–50.
30. *Guo Duo-yi, Wu Yan*. 对我国国债收益率问题的探讨. (A Study on the Earning Ratio of National Debt in China) // Statistics & Information Forum. 1007-3116(2004)03-0005-03. 2004. Vol. 19. No. 3. P. 5–7.

31. *Cai Xiu-li*. 我国国债利率期限结构研究. (A study on Term Structure of Chinese Bond Market) // *New Finance Economics*. 1009-4202(2010)11-060-01. 2010. Vol. 11. P. 060.
32. *Chen Fang-fei, Shen Chang-zheng*. Nelson-Siegel 模型与国债收益率曲线的预测. (Nelson-Siegel Model and the Yield Curve of China's Bond Market) // *Finance Forum*. 1002-6487(2006)02-0133-02. 2006. Vol. 02. P. 133-135.
33. *Hu Yong, Chen Min*. 从国债收益率看我国国债发行的问题. (China's securities issue problem analysis based on national debt earing rate curve) // *Journal of Chongqing Technology and Business University*. 1008-6439(2003)-05-0066-03. 2003. Vol. 5. P. 66-68.
34. *Li Fang, Mao Yu-ping*. 我国固定利率国债收益率曲线研究. (China's Government Fixed-coupon Bond Yield Curve Research) // *Journal of University of Science and Technology of Suzhou*. 1672-0695(2008)04-0014-05. 2008. Vol. 25. No. 4. P. 14-18.
35. *Zhang Lin*. 我国收益率曲线的研究. (A Research On the Yield Curve of China's Bond Market) // *China Business Update*. 2009. Vol. 10. P. 158.
36. *Cheng Xin-ran*. 关于国债收益率曲线的实证分析. (Positive Analysis on the Government Bond Yield Curve of China's Bond Market) // *Market Modernization Magazine*. 2010. Vol. 616. No. 7. P. 149.
37. *Xie Luo-qi, Jia Ping*. 多重性预期假说和我国的收益率曲线研究. (Multiplicity Expectation and Research of China's Yield Curve) // *Inner Mongolia Science & Technology and Economy*. 2005. Vol. 09. P. 13-14.
38. *Chen Wei, Ma Jun-chi, Zhao Yao-wen*. 我国国债收益率曲线的实证研究. (China's Government Bond Yield Curve Research) // *Shandong Economy*. 1000-971X(2011) 03-0118-06. 2011. Vol. 164. No. 3. P. 118-123.
39. *Shao Rong-ping, Yang Jun-xia*. 上证国债零息票收益率曲线的构造及其特征分析. (SSE Zero-coupon Yield Curve Construction Based on Treasury) // *China Business (JINGJI LILUN YANJIU)*. 2008. Vol. 22. P. 55-56.
40. *Yang Bin*. 收益率曲线功能分析 - 基于我国国债数据的实证研究 (Yield Curve Function Analysis - Research Based on China's Bond Market) // *Productivity Research*. 1004-2768(2010)01-0080-03. 2010. Vol. 1. P. 80-82.
41. *Chinabond Yield Curves Users' Manual* (<http://eyield.chinabond.com.cn/cbweb/index.htm?lx=yc>).

*Препринт WP16/2012/03
Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука*

Ван Цзян

Срочная структура процентных ставок на китайском рынке облигаций

Зав. редакцией оперативного выпуска *А.В. Заиченко*
Технический редактор *Ю.Н. Петрина*

Отпечатано в типографии
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики» с представленного оригинал-макета
Формат 60×84 $\frac{1}{16}$. Тираж 50 экз. Уч.-изд. л. 1,45
Усл. печ. л. 1,4. Заказ № . Изд. № 1534
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
125319, Москва, Кочновский проезд, 3
Типография Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»