ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н.А. Андреев, М.З. Курбангалеев,
В.А. Лапшин

АРБИТРАЖНЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ НА РЫНКАХ КРЕДИТНЫХ ДЕФОЛТНЫХ СВОПОВ И ОБЛИГАЦИЙ

Препринт WP16/2012/04
Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Москва
2012

Редакторы серии WP16
«Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука»
С.Н. Смирнов, А.Г. Шоломицкий

Андреев, Н. А., Курбангалеев, М. З., Лапшин, В. А. Арбитражные возможности на рынках кредитных дефолтных свопов и облигаций : препринт WP16/2012/04 [Текст] / Н. А. Андреев, М. З. Курбангалеев, В. А. Лапшин ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». – М. : Изд. дом Высшей школы экономики, 2012. – 38 с.

В работе рассмотрены условия согласованности представлений о кредитном качестве эмитента при ценообразовании CDS и облигаций, подверженных дефолту. Показано, при каких условиях выполнено равенство премии за кредитный риск и CDS-премии, а также условие реплицируемости безрисковой облигации портфелем из CDS и облигации, подверженной дефолту. Получена величина, аналогичная рыночной цене риска, которая отражает представление рынка о кредитном качестве и инвариантна относительно рассматриваемых инструментов.

Ключевые слова: арбитражные возможности, премия за кредитный риск, кредитный дефолтный своп, интенсивность дефолта, рыночная цена риска.

Андреев Николай Анатольевич – младший научный сотрудник, лаборатория по финансовой инженерии и риск-менеджменту, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; аспирант 3-го года обучения, кафедра системного анализа, факультет ВМК, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Курбангалеев Марат Зуфарович – младший научный сотрудник, лаборатория по финансовой инженерии и риск-менеджменту, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; аспирант 3-го года обучения, департамент финансов, Национальный исследовательский университет – «Высшая школа экономики».

Лапшин Виктор Александрович – доцент департамента финансов, научный сотрудник лаборатории по финансовой инженерии и риск-менеджменту, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; факультет ВМК, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Исследование осуществлено в рамках
Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2012 г.

Препринты Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» размещаются по адресу: http://www.hse.ru/org/hse/wp

Введение

В последние годы в мировой литературе по риск-менеджменту и финансовой инженерии значительное внимание уделяется проблеме моделирования кредитного риска и ценообразования кредитных инструментов. При ценообразовании инструментов, стоимость которых зависит от кредитного качества некоторого лица (корпорация, муниципалитет, государство и т.д.), типичным является предположение об однородности представлений участников разных рынков о кредитном качестве эмитентов и одинаковом отражении информации в ценах указанных инструментов. На самом деле, данное предположение не является очевидным и может быть оспорено с нескольких точек зрения. С одной стороны, на различных рынках существуют принципиально различные факторы (ликвидность, доступ к рынкам разных инструментов, качество информации и т.д.), которые влияют на представление игроков о кредитном качестве эмитентов и на отражение этой информации в ценах. С другой стороны, существенными являются особенности структуры и соотношение параметров (ставок купона, сроков до погашения, наличие встроенных опционов, конвенция начисления и т.д.) инструментов, торгуемых на этих рынках.

Описанные предположения преимущественно применяются к рынкам дефолтных облигаций и соответствующих кредитных дефолтных свопов (CDS). В этом контексте принято считать, что позиция, состоящая из дефолтной облигации с фиксированным купоном и соответствующего CDS, эквивалентна безрисковой облигации, а указанное соотношение принято обосновывать принципом отсутствия арбитражных возможностей. Несмотря на то, что эквивалентность была доказана только для специального случая [Duffie, 1999], а анализ реальных данных противоречит следствиям из указанных предположений [Longstaff, Mithal, Neis, 2005], многие авторы (часто неявно) предполагают реплицируемость безрисковой облигацией с помощью дефолтной облигации и CDS и постулируют равенство стоимости указанных позиций, равенство CDS-премии и спрэда облигаций [Calice, Chen, Williams, 2011], а также корректность риск-нейтрального оценивания стоимости дефолтных облигаций по информации о ценах CDS, и наоборот (например, [Hull, White, 2000] и [Houweling, Vorst, 2005]).

В данной работе делается попытка теоретического осмысления предположений, часто безапелляционно используемых в работах по ценообразованию дефолтных облигаций и CDS. Целью работы является выявление условий, при которых выполняется равенство премий за кредитный риск в ценах дефолтных облигаций и CDS, и условий, при которых возможны другие, нестрогие соотношения между показателями. В работе рассматривается упрощенная модель безарбитражного рынка с тремя видами инструментов. Основным инструментом анализа является принцип отсутствия арбитражных возможностей и соответствующий аппарат финансовой математики. В ходе изучения построенной модели также была определена инварианта, отражающая отношение рынка к дефолту, наподобие рыночной цены риска на рынке бескупонных облигаций.

1 Описание модели рынка и риск-нейтральное оценивание инструментов

1.1 Базовые определения и подход к моделированию

Рассмотрим модель эффективного абсолютно ликвидного рынка в непрерывном времени, который состоит из трех различных инструментов:

а) безрисковые облигации с датой погашения T, непрерывно начисляемым купоном со скоростью начисления $c(t)$ и номиналом 1. $P^z(t)$ – цена облигации в момент t.

б) купонные облигации, подверженные дефолту, с датой погашения T, непрерывно начисляемым купоном со скоростью начисления $\tilde{c}(t)$ и номиналом 1. Доля возмещения (recovery rate) равна R, компенсация выплачивается в момент дефолта. В дальнейшем будет предполагаться, что $\tilde{c}(t) = c(t) + L$, где величина $L > 0$ интерпретируется как премия за кредитный риск облигации. Премия за ликвидность не учитывается, так как рассматривается модель абсолютно ликвидного рынка. $P^r(t)$ – цена облигации в момент t.

в) кредитные дефолтные свопы (CDS), кредитным событием по которым является дефолт купонной облигации. Покупатель контракта обязуется непрерывно выплачивать продавцу премию со скоростью начисления $s(t) \equiv s$ вплоть до момента наступления дефолта или срока истечения, в случае дефолта продавец обязуется выплатить покупателю компенсацию в размере $1 - R$ в момент дефолта. $P^{CDS}(t)$ – цена свопа в момент t.

Динамика банковского счета описывается уравнением

$$dB(t) = r(t)B(t)dt \tag{1.1}$$

За начальный момент берется $t=0$. Всюду далее будет использоваться следующее обозначение: неслучайные функции от времени будут обозначаться как $f(t)$, в то время как случайные будут записаны с помощью нижнего индекса: f_t.

В данной работе ценообразование инструментов, подверженных дефолту, производится в рамках подхода, основанного на интенсивности дефолта (default intensity) и рассматриваемого, например, в работах Ландо [Lando, 1998], Даффи и Синглтона [Duffie, Singleton, 1999], Альфонси и Бриго [Brigo, Alfonsi, 2005].

Описанные выше инструменты можно рассматривать как один класс инструментов со случайной конечной выплатой F, непрерывным начислением купонов со скоростью f_t, долей возмещения Z и случайным временем дефолта τ и сроком истечения T. Данный класс инструментов обозначим аналогично [Brigo, Alfonsi, 2005], $DCT(F, f_t, Z, \tau)$. Конечная выплата является случайной в том смысле, что зависит от того, произошел ли дефолт до срока истечения (в этом случае выплата номинала не производится).

Предполагается, что в модели состояние рынка определяется только случайным процессом мгновенной ставки r_t, порождающим фильтрацию

$$\mathbb{F}=\left\{\mathcal{F}_t, t\in\mathbb{R}_+\right\},\quad \mathcal{F}_t=\sigma\{r_s : 0\le s\le t\}; \tag{1.2}$$

время дефолта τ моделируется с помощью процесса-индикатора дефолта $H_t=\mathbb{I}\left\{\tau\le t\right\}$, порождающего фильтрацию

$$\mathbb{H}=\left\{\mathcal{H}_t, t\in\mathbb{R}_+\right\},\quad \mathcal{H}_t=\sigma\{H_s : 0\le s\le t\}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $\mathbb{I}\{A\}$ – индикаторная функция множества A. Полная информация о рынке на момент t состоит из информации о состоянии переменных рынка на момент t и информации о том, произошел ли дефолт к этому моменту:

$$\mathbb{G}=\left\{\mathcal{G}_t, t\in\mathbb{R}_+\right\},\quad \mathcal{G}_t=\mathcal{F}_t\vee\mathcal{H}_t. \tag{1.4}$$

Процесс накопленных дивидендов для инструмента $DCT(F, f_t, Z, \tau)$ имеет вид

$$D_t = F\mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t (1-H_u) f_u du + \int_0^t Z dH_u . \tag{1.5}$$

Первое слагаемое соответствует выплате в срок истечения контракта, второе – купонным выплатам вплоть до момента дефолта или срока истечения, третье – выплате при дефолте. Таким образом, для рассматриваемых инструментов процесс дивидендов записывается как

$$\begin{aligned}
&D_t^z = \mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t c_u du \\
&D_t^r = (1-H_T)\mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t (1-H_u)\tilde{c}_u du + R\int_0^t dH_u \\
&D_t^{CDS} = -\int_0^t (1-H_u) s du + (1-R)\int_0^t dH_u
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Согласно теории риск-нейтрального оценивания относительно риск-нейтральной меры Q^*, цена $DCT(F, f_t, Z, \tau)$ равна

$$P_t = B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1}(1-H_u) f_u du + \int_t^T B_u^{-1} Z dH_u + B_T^{-1} F \middle| \mathcal{G}_t \right), \tag{1.7}$$

где первое слагаемое суммы соответствует будущим купонным выплатам, второе – выплате в случае дефолта, третье – конечной выплате. Для рассматриваемых инструментов цены равны

$$\begin{aligned}
&P_t^z = B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} c_u du + B_T^{-1} \middle| \mathcal{G}_t \right), \\
&P_t^r = B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1}(1-H_u)\tilde{c}_u du + R\int_t^T B_u^{-1} dH_u + B_T^{-1}(1-H_T) \middle| \mathcal{G}_t \right), \\
&P_t^{CDS} = B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(-\int_t^T B_u^{-1}(1-H_u) s du + (1-R)\int_t^T B_u^{-1} dH_u \middle| \mathcal{G}_t \right),
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Интегралы в формулах (1.5)–(1.8) понимаются в смысле Лебега – Стильтьеса. В целях удобства обозначим $\tilde{H}_t = 1 - H_t = \mathbb{I}\{\tau > t\}$. Несложно проверить, что оба процесса адаптированы относительно $\mathbb{H}$ и, соответственно, $\mathbb{G}$, их траектории имеют конечную вариацию и непрерывны справа с конечными пределами слева (càdlàg). Значит, $H_t, \tilde{H}_t$ являются семимартингалами [Protter, 2004, p. 55], и интегралы определены корректно.

1.2 Задание интенсивности дефолта в модели рынка

Всюду далее в целях удобства делается ряд стандартных предположений о времени дефолта:

а) $Q^*\{\tau = t'\} = 0$;

б) $Q^*\{\tau > t\} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$;

в) $Q^*\{\tau < +\infty\} = 1$

Предположение а) является стандартным для моделей сокращенной формы и говорит о непрерывности распределения момента дефолта. Это оправдано во многих прикладных случаях, особенно если нет априорной информации о том, что дефолт может наступить в конкретный момент времени. Примером предсказуемого дефолта может служить банкротство американского автопроизводителя General Motors в 2009 г. В марте 2009 г. администрация США обязала GM под угрозой принудительного банкротства до 1 июня того же года подготовить план преодоления финансовых проблем, с которыми столкнулась компания в результате мирового финансового кризиса. По мере приближения назначенного дедлайна банкротство становилось более вероятным. В результате 1 июня 2009 г. для GM была запущена процедура банкротства. Этот пример говорит о том, что на практике может возникнуть необходимость ввести скачки в распределении времени дефолта. Поэтому сразу подчеркнем, что в данной модели подобные случаи исключены, хотя похожее исследование можно провести и для распределений общего вида.

В работе рассматривается динамика на конечном отрезке времени $[0;T]$, поэтому предположение б) не является ограничивающим, если только не рассматривается случай, когда дефолт может наступить лишь до момента $T' < T$. Предположение в) является техническим и не ограничивает общности.

Обозначим условную вероятность дожития в момент t как $G_t = Q^*\{\tau > t \mid \mathcal{F}_t\}$. Процессом дефолта (hazard process) называется адаптированный относительно $\mathcal{F}_t$ процесс Γ_t такой, что $G_t = e^{-\Gamma_t}$. Предполагается, что Γ_t допускает следующее интегральное представление

$$\Gamma_t = \int_0^t \gamma_u du, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{1.9}$$

где γ_t – процесс интенсивности дефолта (default intensity), неотрицательный, прогрессивно измеримый относительно $\mathbb{F}$ и имеющий интегрируемые траектории. Кроме того, из предположения в) о времени дефолта следует условие $\int_0^{+\infty} \gamma_u du = +\infty$.

Используя введенные обозначения, можно записать выражение для цены инструмента (1.7) в следующем виде:

Лемма 1. [Bielecki, Rutkowski, 2002, p. 230]: *если процессы* G_t *и, соответственно,* Γ_t *являются непрерывными, то цена инструмента* $DCT(F, f_t, Z, \tau)$ *может быть записана как*

$$P_t = \mathbb{I}\{\tau > t\} B_t e^{\Gamma_t} \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} f_u e^{-\Gamma_u} du + \int_t^T B_u^{-1} Z e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right). \tag{1.10}$$

Замечание: из леммы видно, что цена актива равна нулю после наступления дефолта. Это объясняется тем, что возмещенная стоимость включена в дивиденды. Однако в нашем случае удобнее будет пользоваться следующей интерпретацией: будем считать, что для инструмента $DCT(F, f_t, Z, \tau)$ компенсация не включается в дивиденды, тогда после дефолта цена инструмента равна Z. В таком случае процессы цены и накопленных дивидендов равны:

$$D_t = F\mathbb{I}\{t \geq T\} + \int_0^t (1 - H_u) f_u du, \tag{1.11}$$

$$P_t = \mathbb{I}\{\tau > t\} B_t e^{\Gamma_t} \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} f_u e^{-\Gamma_u} du + \int_t^T B_u^{-1} Z e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) + \mathbb{I}\{\tau \leq t\} Z. \tag{1.12}$$

1.3 Уравнение динамики цены актива, подверженного дефолту

Для дальнейшего исследования условий отсутствия арбитражных возможностей на рынке облигаций и кредитных свопов необходимо получить уравнение динамики портфеля из данных инструментов. В связи с этим сначала получим уравнение динамики актива $DCT(F, f_t, Z, \tau)$, из которого следуют остальные. Для этого введем следующие случайные процессы:

$$L_t = \tilde{H}_t e^{\Gamma_t} \in \mathcal{M}(\mathbb{G})$$
$$\hat{M}_t = H_t - \Gamma_{t\wedge\tau} \in \mathcal{M}(\mathbb{G}) \tag{1.13}$$

Доказательство мартингальности процессов $L_t, \hat{M}_t$ см. в [Bielecki, Rutkowski, 2002, p. 152–153]. Там же приводится следующее соотношение:

$$dL_t = -L_{t-} d\hat{M}_t \tag{1.14}$$

Несложно видеть, исходя из представления (1.9), что

$$\Gamma_{t\wedge\tau} = \int_0^{t\wedge\tau} \gamma_u du = \int_0^t \overline{\gamma}_u du, \quad \text{где} \quad \overline{\gamma}_t = \gamma_t \mathbb{I}\{\tau \le t\} \quad \Rightarrow \tag{1.15}$$
$$\Rightarrow \quad \overline{\gamma}_t dt = dH_t - d\hat{M}_t \tag{1.16}$$

Динамика цены P_t актива $DCT(F, f_t, Z, \tau)$ в случае отсутствия купонов и нулевой доли возвращения получена в [Bielecki, Rutkowski, 2002, p. 248]. Аналогичным образом получается динамика в общем случае.

Теорема 1: *пусть цена* P_t *задается выражением* (1.10)*. Тогда динамика* P_t *описывается следующим стохастическим дифференциальным уравнением:*

$$dP_t = (r_t dt - d\hat{M}_t)P_{t-} - L_{t-}\gamma_t Z dt - L_{t-} f_t dt + B_t L_{t-} d\tilde{m}_t, \text{ где} \tag{1.17}$$
$$\tilde{m}_t = \mathbb{E}\left(\int_0^T B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u + f_u) du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \mid \mathcal{F}_t \right) \in \mathcal{M}(\mathbb{F}) \tag{1.18}$$

Доказательство: согласно определению (1.10)

$$P_t = B_t \underbrace{\tilde{H}_t e^{\Gamma_t}}_{L_t} \underbrace{\mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} f_u e^{-\Gamma_u} du + \int_t^T B_u^{-1} Z e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right)}_{m_t} = B_t L_t m_t. \tag{1.19}$$

Получим мартингальное представление для m_t:

$$m_t = \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} f_u e^{-\Gamma_u} du + \int_t^T B_u^{-1} Z e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) =$$

$$= \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_0^T B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u + f_u) du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) - \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_0^t B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u + f_u) du \mid \mathcal{F}_t \right) =$$

$$= \tilde{m}_t - \int_0^t B_u^{-1} e^{-\Gamma_u} (Z\gamma_u + f_u) du, \tag{1.20}$$

где $\tilde{m}_t$ является мартингалом Дуба (мартингалом Леви).

Применим формулу Ито для семимартингалов к процессу $\tilde{P}_t = L_t m_t$. Так как m_t непрерывен, а L_t имеет ограниченную вариацию, то $[L, m]_t = 0$ (см. [Ширяев, 1998, с. 369]). Тогда

$$\begin{aligned} d\tilde{P}_t &= L_{t-} dm_t + m_{t-} dL_t = \\ &= L_{t-} d\tilde{m}_t - L_{t-} B_t^{-1} (Z\gamma_t + f_t) dt - m_{t-} L_{t-} d\hat{M}_t = \\ &= L_{t-} d\tilde{m}_t - \tilde{P}_{t-} d\hat{M}_t - L_{t-} B_t^{-1} (Z\gamma_t + f_t) dt. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Применим формулу Ито к $P_t = B_t \tilde{P}_t$, учитывая непрерывность B_t, и получим утверждение теоремы:

$$\begin{aligned} dP_t &= B_t d\tilde{P}_t + \tilde{P}_{t-} r_t B_t dt = \\ &= B_t L_{t-} d\tilde{m}_t - B_t \tilde{P}_{t-} d\hat{M}_t - L_{t-} (Z\gamma_t + f_t) dt + r_t B_t \tilde{P}_{t-} dt = \\ &= (r_t dt - d\hat{M}_t) P_{t-} - L_{t-} \gamma_t Z dt - L_{t-} f_t dt + B_t L_{t-} d\tilde{m}_t. \qquad \square \end{aligned} \tag{1.22}$$

Результат теоремы 1 верен для безрисковой облигации, если в (1.17)–(1.18) формально положить $\gamma_t \equiv 0,\ H_t \equiv 0$. Доказательство проводится аналогично приведенному выше. Динамика цены безрисковой облигации, таким образом, описывается уравнением

$$dP_t^z = (r_t P_t^z - f_t) dt + B_t d\tilde{m}_t^z, \quad \tilde{m}_t^z \in \mathcal{M}(\mathbb{F}). \tag{1.23}$$

Замечание: для интерпретации, при которой компенсация Z не включена в дивиденды (см. Замечание к Лемме 1), уравнение динамики элементарно получается на основе (1.22) добавлением «скачка» цены на величину Z в момент дефолта:

$$dP_t = (r_t dt - d\hat{M}_t)P_{t-} - L_{t-}\gamma_t Z dt - L_{t-} f_t dt + B_t L_{t-} d\tilde{m}_t + Z dH_t. \quad (1.24)$$

2 Арбитражные возможности на рынке кредитных свопов и облигаций

2.1 Обоснование равенства премий за кредитный риск на рынке плавающих ставок

Существует множество различных определений понятия отсутствия арбитражных возможностей, в данной работе будет использоваться одно из наиболее распространенных:

Определение 1: *Самофинансируемая стратегия называется* арбитражной *на отрезке* $[0,T]$, *если соответствующий ей портфель с нулевой начальной стоимостью в конце периода почти наверное имеет неотрицательную стоимость и с положительной вероятностью его стоимость положительна:*

$$\pi_t \in SF_{arb} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \pi_t \in SF, \\ X_0^{\pi} = 0, \\ \mathbb{P}\{X_T^{\pi} \geq 0\} = 1, \\ \mathbb{P}\{X_T^{\pi} > 0\} > 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Определение 2: *на рынке* отсутствуют арбитражные возможности *на отрезке* $[0,T]$, *если на рынке не существует арбитражных стратегий.*

В данной работе торговой стратегией называется предсказуемый четырехмерный процесс $\pi_t = (\pi_t^B, \pi_t^r, \pi_t^{CDS}, \pi_t^z)$, компоненты которого обозначают величину банковского счета и размер позиции по дефолтной облигации, кредитному дефолтному свопу, безрисковой облигации соответственно. Соответствующий вектор цен активов обозначается $P_t = (B_t, P_t^r, P_t^{CDS}, P_t^z)^T$, вектор накопленных дивидендов – $D_t = (0, D_t^r, D_t^{CDS}, D_t^z)^T$. Стоимость портфеля, соответствующего стратегии π_t тогда равна

$$X_t^{\pi} = \pi_t P_t + \int_0^t \pi_u dD_u, \quad (2.2)$$

где произведение двух векторов понимается как скалярное произведение.

Прежде чем приступать к исследованию рынка с плавающими ставками, заметим следующее тривиальное свойство безрисковой облигации с плавающим купоном r_t:

Теорема 2: *пусть* r_t *– безрисковая ставка на рынке, не допускающем арбитражные возможности. Тогда безрисковая облигация с непрерывным начислением процента и плавающей ставкой в каждый момент времени имеет стоимость, равную номинальной:*

$$P_t^z = P_T^z \quad \forall t \in [0,T] \tag{2.3}$$

Доказательство: из предположения об отсутствии арбитражных возможностей следует, что скорость начисления купона у данной облигации $c_t = r_t$. Результат теоремы несложно получить, вычислив P_t^z по формуле (1.8).

Стандартным предположением при совместном моделировании кредитного и рыночного риска является равенство премии за кредитное качество L и CDS-премии s. Получим необходимое и достаточное условие этого равенства.

Теорема 3: *пусть процесс* $c_t = r_t$ *является непрерывным. Тогда а) на безарбитражном рынке плавающих процентных ставок равенство премий* $L = s$ *верно, если до момента дефолта цена безрисковой облигации равна стоимости портфеля, состоящего из кредитного дефолтного свопа и облигации, подверженной дефолту:*

$$P_t^r + P_t^{CDS} = P_t^z \quad \forall t < \tau; \tag{2.4}$$

б) если выполнено $L = s$ *и процесс* $A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z$ *является непрерывным до момента дефолта, то верно (2.4).*

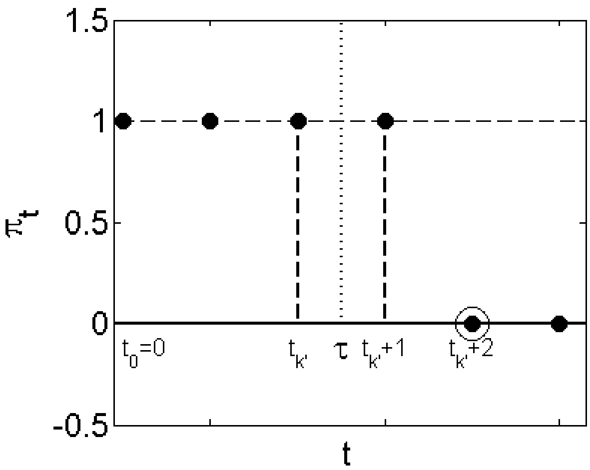
Приведем конструктивное доказательство данного утверждения. Будем придерживаться соглашения, когда компенсация в момент дефолта Z не включается в выплаченные дивиденды. Вместо этого полагается, что после наступления дефолта стоимость актива равна Z. Так как выплата по дефолтной облигации полагается равной R, а выплата по CDS – равной $1-R$, то, используя результат теоремы 2, получаем, что после дефолта стоимость A_t портфеля, состоящего из дефолтной облигации, CDS и проданной в короткую безрисковой облигации, равна нулю:

$$A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z = R + (1-R) - 1 = 0 \quad \forall t \geq \tau. \tag{2.5}$$

В пункте а) предположим, что $A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z = 0, \quad \forall t < \tau$, т.е. $A_t \equiv 0$ на рассматриваемом отрезке. Докажем, что $L = s$ от противного: пусть $L > s$. Становится интуитивно понятно, что в таком случае на рынке существуют арбитражные возможности. Арбитражной стратегией будет приобретение портфеля A_t в начальный момент времени, сохранение позиции до дефолта и ликвидация через некоторое время после. Так как портфель имеет нулевую стоимость, стратегия является самофинансируемой. Из-за разницы премий дивиденды портфеля будут положительными, что приводит к получению безрисковой прибыли до момента дефолта. После этого дефолтная облигация и CDS не дают дивидендов, а короткая позиция по безрисковой бумаге приводит к уменьшению стоимости портфеля. Однако если скорость начисления дивидендов c_t непрерывна как функция времени, то можно произвести ликвидацию достаточно быстро, и потери от короткой позиции будут не больше накопленной прибыли, что приведет к положительной стоимости портфеля.

Описанная стратегия выглядит излишне усложненной, кажется, что необходимо ликвидировать позицию сразу в момент дефолта и не терпеть убытков вовсе. К сожалению, такая стратегия недопустима с точки зрения финансовой математики, так как не является предсказуемой. Предсказуемая стратегия в момент t использует информацию только из прошлого (π_t измерима относительно $G_{<t}$).

Чтобы проиллюстрировать значение предсказуемости, на рис. 1 приведен пример двух стратегий в дискретном времени: стратегия слева предсказуема, справа – нет.



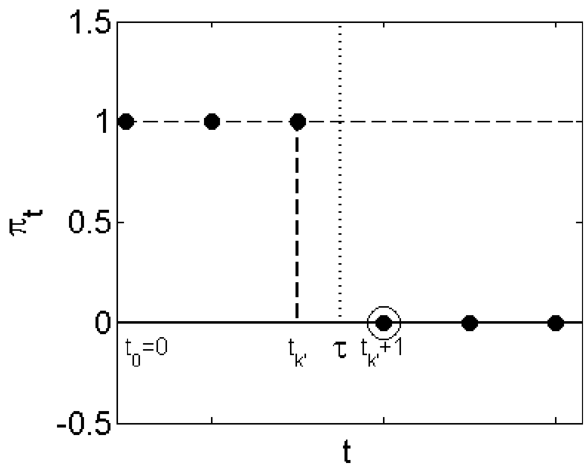


Рис. 1. Пример предсказуемой (слева) и непредсказуемой (справа) стратегии в дискретном времени

Различие заключается в моменте ликвидации портфеля, так как решение игрок принимает не на основе внешней информации, а на основе значений цен. На левом графике видно, что дефолт произошел между моментами $t_{k'}$ и $t_{k'}+1$. В момент $t_{k'}+1$ информация о дефолте отразилась в ценах. Если игрок перестроит портфель в $t_{k'}+1$, значит, его стратегия использует информацию о ценах в текущий момент и не является предсказуемой. Поэтому перестройка должна происходить в момент $t_{k'}+2$ или позже, что и изображено на рисунке. В непрерывном случае перестройка также должна производиться лишь через некоторое время после дефолта, но не сразу при наступлении события.

Формальное доказательство пункта а) сводится к нахождению арбитражной стратегии вида $\tilde{\pi}_t^{\varepsilon} = (0, \tilde{J}_t^{\varepsilon}, \tilde{J}_t^{\varepsilon}, -\tilde{J}_t^{\varepsilon})$, где $\tilde{J}_t^{\varepsilon} = \mathbb{I}\{t \le \tau + \varepsilon\}$. В предположении $L < s$ противоречие получается для симметричной стратегии $-\tilde{\pi}_t^{\varepsilon} = (0, -\tilde{J}_t^{\varepsilon}, -\tilde{J}_t^{\varepsilon}, \tilde{J}_t^{\varepsilon})$. В обоих случаях стоимость позиции равна нулю, поэтому все стратегии такого вида являются самофинансируемыми.

Рассмотрим процесс дивидендов портфеля, формализованный в (1.11), соответствующий длинной позиции по дефолтным инструментам и короткой – по безрисковой облигации:

$$\begin{gathered}
A_t^D = D_t^r + D_t^{CDS} - D_t^z = \\
= \left[\tilde{H}_t \mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t \tilde{H}_u \tilde{c}_u du \right] + \left[-\int_0^t \tilde{H}_u s du \right] - \left[\mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t \tilde{H}_u c_u du \right] = \\
= -H_t \mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t \left[\tilde{H}_u (\tilde{c}_u - s) - c_u \right] du = \\
= -H_t \mathbb{I}\{t \ge T\} + \int_0^t \tilde{H}_u (\tilde{c}_u - s - c_u) du - \int_0^t H_u c_u du. \qquad (2.6)
\end{gathered}$$

Первое слагаемое суммы характеризует потери из-за короткой позиции, равные номиналу, если дефолт был; в противном случае убыток будет компенсирован выплатой номинала по длинной позиции в конце периода. Второе слагаемое – дивиденды портфеля до дефолта, третье – потери после дефолта в случае удержания короткой позиции.

Пусть $\tau < T$, выберем ε так, что $\tau + \varepsilon \le T$. Тогда стоимость портфеля $X_t^{\tilde{\pi}}$ на отрезке $[0,T]$ равна

$$X_t^{\tilde{\pi}} = \int_0^t \tilde{J}_u^{\varepsilon} dA_u^D = A_{t\wedge(\tau+\varepsilon)}^D - A_0^D = A_{t\wedge(\tau+\varepsilon)}^D = \{\tau' = t \wedge (\tau+\varepsilon)\} =$$

$$= \underbrace{-H_{\tau'}\mathbb{I}\{\tau' \ge T\}}_{=0\ \forall t\in[0,T]} + \int_0^{\tau'} \tilde{H}_u(\tilde{c}_u - s - c_u)du - \int_0^{\tau'} H_u c_u du =$$

$$= (L-s)\cdot(t\wedge\tau) - \int_{\tau}^{\tau'} c_u du. \tag{2.7}$$

При $\tau \ge T$ очевидно, что $X_t^{\tilde{\pi}} = (L-s)T > 0$. Поэтому рассматриваем только $\tau < T$. При $t \le \tau$ $X_t^{\tilde{\pi}} = (L-s)t > 0$; при $t > \tau$

$$X_t^{\tilde{\pi}} = (L-s)\tau - \int_{\tau}^{\tau'} c_u du \ge (L-s)\tau - \int_{\tau}^{\tau''=\tau'+\varepsilon} c_u du. \tag{2.8}$$

Выберем $\tau'' > \tau$, а значит и ε, так, чтобы убыток $F(\tau'') = \int_{\tau}^{\tau''} c_u du$ составлял не более половины прибыли: $\tau'' = T \wedge \inf\left\{\theta > \tau : F(\theta-) = \frac{1}{2}(L-s)\tau\right\}$. Выбранный момент является предсказуемым в силу непрерывности и неотрицательности процесса c_t, при этом полагается, что $\inf\{\varnothing\} = +\infty$. Тогда

$$X_t^{\tilde{\pi}} = (L-s)\tau - F(\tau'') \ge \frac{1}{2}(L-s)\tau > 0. \tag{2.9}$$

Таким образом, при $L > s$ для каждого момента дефолта существует предсказуемая стратегия, при которой стоимость портфеля положительна на всем отрезке $[0,T]$, т.е. существуют арбитражные возможности.

Пункт б) доказывается, опять же, от противного. Сначала приведем идею доказательства. По предположению, $L = s$ и процесс A_t непрерывен $\forall t < \tau$. Пусть существует момент $t^* \in (0,T),\ t^* < \tau$ такой, что $P^r_{t^*} + P^{CDS}_{t^*} < P^z_{t^*} \quad \Leftrightarrow \quad A_{t^*} = A^* < 0$. В этом случае на рынке существует арбитражная стратегия, заключающаяся в занятии в момент t^* длинной позиции по дефолтной облигации и CDS, а также короткой – по безрисковой облигации. Так как разница стоимостей позиций равна $-P^r_{t^*} - P^{CDS}_{t^*} + P^z_{t^*} = -A^*$ и положительна, вырученная прибыль размещается на банковском счете. Как и в пункте а), данный портфель ликвидируется немногим после момента дефолта. В конечный момент T портфель имеет стоимость, равную стоимости банковского счета за вычетом небольших потерь после дефолта, и дает безрисковую прибыль с положительной вероятностью.

Формальное доказательство рассмотрим для наиболее интересного случая $0 < t^* < \tau < T$, во всех остальных ситуациях несложно убедиться, что портфель будет иметь положительную или нулевую стоимость. Наша гипотеза заключается в том, что стратегия

$$\tilde{\pi}^\varepsilon_t = \begin{cases} (0,0,0,0), & t \le t^*, \\ (-B^{-1}_{t^*} A^*, 1, 1, -1), & t^* < t \le \tau + \varepsilon, \\ (-B^{-1}_{t^*} A^*, 0, 0, 0), & t > \tau + \varepsilon \end{cases} \tag{2.10}$$

является самофинансируемой и безарбитражной. Стратегия является предсказуемой, при условии непрерывности B_t и A_t, подробнее см. в замечании к теореме.

По определению стратегия π_t называется самофинансируемой ($\pi_t \in SF$), если

$$dX^\pi_t = \pi_t dP_t + \pi_t dD_t. \tag{2.11}$$

В рассматриваемом случае P_t является семимартингалом ($P_t \in S$), $\tilde{\pi}_t$ – процесс ограниченной вариации ($\tilde{\pi}_t \in FV$). Согласно [Жакод, Ширяев, 1994, с. 99, предложение 4.49 б)],

$$dX^{\tilde{\pi}}_t = d(\tilde{\pi}_t P_t) + \tilde{\pi}_t dD_t = \tilde{\pi}_t dP_t + P_{t-} d\tilde{\pi}_t + \tilde{\pi}_t dD_t. \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) условие самофинансируемости равносильно условию

$$P_{t-} d\tilde{\pi}_t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^t P_{u-} d\tilde{\pi}_u = 0 \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.13}$$

Условие (2.13) проверяется непосредственно: обозначим $K_t = \mathbb{I}\{t \geq t^*\}$, $J_t^\varepsilon = \mathbb{I}\{t \geq \tau + \varepsilon\}$, $\tilde{J}_t^\varepsilon = 1 - J_t^\varepsilon$. Несложно убедиться, что при $t^* < \tau$ $K_t \tilde{J}_t^\varepsilon = K_t - J_t^\varepsilon$. Перепишем (2.10) в более удобном виде:

$$\begin{gathered}\tilde{\pi}_t^\varepsilon = (-B_{t^*}^{-1} A^* K_{t-}, K_{t-} \tilde{J}_{t-}^\varepsilon, K_{t-} \tilde{J}_{t-}^\varepsilon, -K_{t-} \tilde{J}_{t-}^\varepsilon) = \\ = \left(-\int_0^t B_u^{-1} A_u dK_{u-}, \int_0^t d(K_{u-} \tilde{J}_{u-}^\varepsilon), \int_0^t d(K_{u-} \tilde{J}_{u-}^\varepsilon), -\int_0^t d(K_{u-} \tilde{J}_{u-}^\varepsilon) \right).\end{gathered} \tag{2.14}$$

Используя второе представление в (2.14), а также непрерывность B_t и A_t при $t \leq t^* < \tau$, легко видеть, что

$$\begin{gathered}\int_0^t P_{u-} d\tilde{\pi}_t^\varepsilon = -\int_0^t B_{u-} B_u^{-1} A_u dK_{u-} + \int_0^t A_{u-} d(K_{u-} \tilde{J}_{u-}^\varepsilon) = \\ = -\int_0^t A_u dK_{u-} + \int_0^t A_{u-} dK_{u-} - \int_0^t A_{u-} dJ_{u-}^\varepsilon = -\int_0^t \Delta A_u dK_{u-} - \int_0^t A_{u-} dJ_{u-}^\varepsilon = \\ = \underbrace{-\Delta A_{t^*} \mathbb{I}\{t \geq t^*\}}_{=0,\text{так как } t^* < \tau} - \underbrace{A_{(\tau+\varepsilon)-} \mathbb{I}\{t \geq \tau + \varepsilon\}}_{=R+(1-R)-1=0,\text{так как } \tau+\varepsilon>\tau} = 0.\end{gathered} \tag{2.15}$$

Таким образом, стратегия самофинансируема. Стоимость портфеля оценивается аналогично (2.7)–(2.9) и равна

$$\begin{gathered}X_t^{\tilde{\pi}} = \int_0^t \tilde{\pi}_u^\varepsilon dP_u + \int_0^t \tilde{\pi}_u^\varepsilon dD_u = -\int_0^t B_{t^*}^{-1} A^* K_{u-} dB_u + \int_0^t K_{u-} \tilde{J}_{u-}^\varepsilon dA_u + \int_0^t K_{u-} \tilde{J}_{u-}^\varepsilon dA_u^D = \\ = -B_{t^*}^{-1} A^* (B_T - B_{t^*}) + \underbrace{A_{\tau+\varepsilon}}_{=0} - A_{t^*} + A_{\tau+\varepsilon}^D - A_{t^*}^D = \\ = |A^*| \frac{B_T}{B_{t^*}} + \int_0^{\tau+\varepsilon} \tilde{H}_u \underbrace{(\tilde{c}_u - s - c_u)}_{=L-s=0 \text{ по условию}} du - \int_0^{\tau+\varepsilon} H_u c_u du =\end{gathered}$$

$$= \left|A^*\right| \frac{B_T}{B_{t^*}} - \int\limits_{\tau}^{\tau+\varepsilon} c_u du \geq \frac{1}{2}\left|A^*\right| \frac{B_T}{B_{t^*}} > 0 \tag{2.16}$$

при $\tau + \varepsilon = \tau'' = T \wedge \inf\left\{\theta > \tau : \int\limits_{\tau}^{\theta} c_u du = \frac{1}{2}\left|A^*\right| \frac{B_T}{B_{t^*}}\right\}$. Таким образом, при сделанном предположении на ранке существует арбитражная стратегия, что приводит к противоречию и доказывает пункт б).

Замечание: 1) допустимость стратегии (2.10) может быть подвергнута сомнению, так как стратегия должна быть предсказуемой, т.е. $\tilde{\pi}_t$ должна быть измеримой относительно $G_{<t}$. Из формулы же следует, что $\tilde{\pi}_{t^*}$ измерима относительно $G_{\leq t^*}$, так как использует информацию не только о прошлых ценах, но и о текущей. На самом деле, до дефолта мы рассматриваем стратегию

$$\tilde{\pi}_t = \begin{cases} (0,0,0,0), & t \leq t^* \\ (B^{-1}_{t^*_-} A_{t^*_-}, -1, -1, 1), & t > t^* \end{cases}, \tag{2.17}$$

которая предсказуема и равна (2.10) при непрерывности B_t и A_t в случайный момент $t^* < \tau$. С точки зрения практики, на рынке существует задержка между моментом принятия решения о совершении операции и самим моментом операции. Если не требовать непрерывности стоимости A_t, то может сложиться ситуация, когда игрок принимает решение об открытии позиции в момент t^* с целью выручить прибыль $A^* > 0$; реально же сделка произойдет в момент $t^{**} > t^*$ по цене A^{**}. Непрерывность позволяет игроку не предсказать цену на коротком интервале, но быть уверенным, что заключенная сделка принесет прибыль ($A^{**} > 0$), так как для каждого момента времени непрерывная функция сохраняет знак в окрестности этого момента. Без требования непрерывности использование подобной стратегии было бы невозможно.

Стоит также отметить, что существование задержки между моментом принятия решения и сделкой может оказывать влияние на финансовый результат от операций уже на стадии формирования портфеля, поскольку дефолт может произойти в интервале между решением о сделке и самой сделкой. Предположим, что для извлечения прибыли инвестору необходимо занять короткую позицию по безрисковой облигации и длинную по облигации дефолтной и CDS. В этом случае в момент t^{**} дефолтная облигация стоит

R, CDS стоит $1-R$, т.е. средств от короткой продажи безрисковой облигации, которая торгуется по номиналу, хватит для занятия соответствующей длинной позиции. После этого должно пройти некоторое время, прежде чем будет произведена сделка ликвидации позиций. В течение этого времени агент будет терпеть убыток по короткой позиции, что необходимо учитывать в стратегии. Задержка между принятием решения и исполнением является одной из характеристик рынка, носящей название *немедленности* (immediacy). В данной работе рынок считается абсолютно ликвидным, поэтому разница между t^* и t^{**} считается пренебрежимо малой и потери от короткой позиции, возникающие вследствие низкой ликвидности, могут не учитываться.

2.2 Арбитражные возможности при дискретных выплатах купонов

Ранее рассматривался случай непрерывного начисления купонных выплат. На практике выплаты осуществляются лишь в известные моменты времени, причем для плавающих процентных ставок величина купона устанавливается в начале периода, а сама выплата – в конце. Рассмотрим случай дискретного начисления купонов по облигациям и посмотрим, при каких условиях должно быть выполнено равенство премий у CDS и облигаций. Для простоты предположим, что купонные выплаты и выплата CDS-премии производятся в одни и те же моменты времени.

Первой трудностью является определение процентной ставки, по которой определяется купон. Использовать введенную ранее мгновенную ставку r_t не совсем корректно, так как на практике ставка зависит от величины периода. Рассмотрим, например, облигации, номинированные в долларах. Для выплат через каждые 3 месяца ставка определяется на основе ставки LIBOR 3M, но для облигаций с выплатами один раз в полгода – на основе LIBOR 6M. Тем не менее в данной работе предполагается, что выплата происходит по ставке r_t, что отражает действительность в случае, когда купонные периоды не слишком велики и волатильность ставки достаточно мала. Данный подход используется, например, в работе Лонгстафа и Шварца [Longstaff, Schwartz, 2012]. Рассмотрение ставки, зависящей от периода, приводит к появлению либо множества дополнительных инструментов рынка – безрисковых банковских счетов под соответствующую процентную ставку для каждого типичного купонного периода, либо к сложному уравнению динамики ставки $r(t_1,t_2)$, зависящей уже от двух переменных (времени и периода). Это потребует дополнительных и более сложных исследований условий безарбитражности на новом рынке, что на данном этапе не является основной задачей.

Из предыдущих рассуждений (см. теоремы 2 и 3) видно, каким образом устанавливались необходимые и достаточные условия равенства премий. Во-первых, использовался результат, что безрисковая облигация всегда стоит номинал. Это позволяло приобрести портфель в тот момент, когда он приносил прибыль и ликвидировать позицию, как только были зафиксированы убытки, причем стоимость портфеля в тот момент гарантированно была равна нулю. Поэтому было возможно закрыть позицию без потерь прежде, чем убытки от короткой позиции станут достаточно велики. В случае дискретных выплат купона утверждение теоремы 2 уже не будет верно из-за появления накопленного купонного дохода. Тем не менее можно утверждать, что сразу после выплаты очередного купона стоимость безрисковой облигации будет близка к номинальной, но не равна ей в точности. Разница возникает из-за того, что измененная модель не является полностью дискретной, в частности, динамика банковского счета все еще описывается уравнением (1.1), а не дискретным аналогом. Переход к полностью дискретной модели означал бы, что агенты могут входить в рынок лишь в определенные моменты времени, в то время как дефолт может наступить *между* точками входа. Это может привести к ситуации, когда агент не может управлять портфелем некоторое время и может понести убытки. Поэтому представляется логичным оставить модель рынка в непрерывном времени, изменив лишь правило начисления купонных выплат.

Заметим, что если величина ставки соответствует купонному периоду, как делается на практике, то после выплаты купона цена безрисковой облигации в точности равна номиналу. Это говорит в пользу введения дополнительных процессов ставок, однако потребует сложных условий безарбитражности. Поэтому данная модификация модели оставлена для рассмотрения в последующих исследованиях.

Ниже будет доказан результат, аналогичный теореме 2, с той лишь разницей, что цена облигации близка к номинальной стоимости лишь в моменты выплаты купонов, при этом отклонение близко к нулю, если интервалы купонных выплат малы.

Теорема 4: *пусть* $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ *– моменты купонных выплат по безрисковой облигации с плавающим купоном, при этом* $\sup\limits_{[0,T]} \mathbb{E}|r_t|^2 < +\infty$. *Тогда существует случайная функция* ξ_t, *измеримая относительно* $\mathcal{G}_t$, *имеющая конечный второй момент и равномерно сходящаяся к нулю в среднеквадратическом смысле при* $\max\limits_{k=1\ldots N} \Delta t_k \to 0$, *для которой выполнено*

$$\left|P_t^z - 1\right| \le \xi_t \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.18}$$

Доказательство: обозначим $t_0 = 0$, тогда величина купонной выплаты в момент t_k равна $r_{t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) = r_{k-1}\Delta t_k$, $k = \overline{1,N}$. В случае дискретных выплат цена безрисковой облигации вычисляется аналогично (1.8):

$$P_t^z = B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} dC_u + B_T^{-1} \middle| \mathcal{G}_t \right), \tag{2.19}$$

где C_t – суммарный накопленный купон на момент t, т.е. кусочно-постоянная функция, имеющая скачки величины $r_{k-1}\Delta t_k$ в моменты t_k соответственно. Предполагаем, что C_t непрерывна справа, тогда интеграл в (2.19) понимается в смысле Лебега – Стильтьеса. Заметим, что (1.8) можно записать в такой же форме для $C_t = \int_0^t c_u du$. Введем следующие обозначения, определяющие границы периода, которому принадлежит момент t:

$$\begin{aligned} &m^+(t) = \inf\{t_k : t_k \ge t\}, \quad m^-(t) = \sup\{t_k : t_k < t\}; \\ &\theta^+(t) = \inf\{k : t_k \ge t\}, \quad \theta^-(t) = \sup\{k : t_k < t\}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Будем обозначать $P_{t_k}^z, B_{t_k}, r_{t_k}$ как P_k^z, B_k, r_k соответственно. Цена безрисковой облигации при непрерывном начислении, согласно теореме 2, тождественно равна 1.

1) Первым шагом доказательства будет оценка невязки $\left|P_t^z - 1\right|$ в моменты выплаты купонов. Доказательство будет проводиться по индукции. Очевидно, что $P_N^z = 1$. Рассмотрим невязку для P_{n-1}^z и выразим ее через P_n^z:

$$P_{n-1}^z = B_{n-1}\mathbb{E}\left(\sum_{i=n}^N B_i^{-1} r_{i-1}\Delta t_i + B_N^{-1} \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) = B_{n-1}\mathbb{E}\left(B_n^{-1} r_{n-1}\Delta t_n + \sum_{i=n+1}^N B_i^{-1} r_{i-1}\Delta t_i + B_N^{-1} \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) =$$

$$= B_{n-1}\mathbb{E}\left(B_n^{-1} r_{n-1}\Delta t_n \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) + B_{n-1}\mathbb{E}\left(\underbrace{\mathbb{E}\left(\sum_{i=n+1}^N B_i^{-1} r_{i-1}\Delta t_i + B_N^{-1} \middle| \mathcal{G}_n \right)}_{=\frac{P_n^z}{B_n}} \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) =$$

$$= B_{n-1}\mathbb{E}\left(B_n^{-1} r_{n-1}\Delta t_n \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) + B_{n-1}\mathbb{E}\left(\frac{P_n^z}{B_n} \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) = \mathbb{E}\left(\frac{B_{n-1}}{B_n}(P_n^z + r_{n-1}\Delta t_n) \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) =$$

$$= \mathbb{E}\left(\frac{B_{n-1}}{B_n}(P_n^z + r_{n-1}\Delta t_n) \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) = \mathbb{E}\left(\frac{B_{n-1}}{B_n}(1 + r_{n-1}\Delta t_n) \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) + \mathbb{E}\left(\frac{B_{n-1}}{B_n}(P_n^z - 1) \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right). \qquad (2.21)$$

Видим, что первое слагаемое суммы в точности равно 1, если модель динамики банковского счета является дискретной. Но если периоды между выплатами малы, дискретная модель приближает непрерывную, поэтому ожидается, что первое слагаемое будет близко к единице. Второе слагаемое означает погрешность, накопленную за все последующие периоды (не предыдущие, так как индукция идет от конца к началу). Оценим оба слагаемых, чтобы по индукции получить оценку невязки цен.

2) Обозначим за B_t^Δ величину банковского счета, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} &dB_t^\Delta = B_t^\Delta r_{k-1} dt, \quad t \in [t_{k-1}, t_k), \\ &B_0^\Delta = 1. \end{aligned} \qquad (2.22)$$

Это динамика счета при кусочно-постоянной аппроксимации r_t^Δ истинной функции мгновенной ставки r_t, т.е. динамика при дискретной модели. На рис. 2 приведен пример такого приближения.

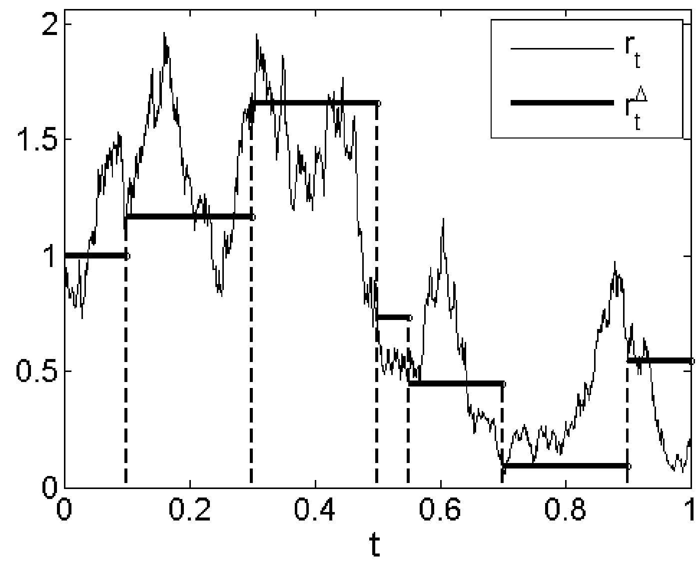


Рис. 2. Кусочно-постоянная аппроксимация мгновенной форвардной ставки, изменяющейся согласно модели Кокса – Ингерсола – Росса. Разрывы совпадают по времени с моментами купонных выплат

Заметим, что

$$\frac{B_{n-1}^{\Delta}}{B_n^{\Delta}} = 1 + r_{n-1}\Delta t_n, \quad n = \overline{1, N}. \tag{2.23}$$

Докажем, что (2.22) приближает в некотором роде (1.1) и оценим погрешность. Для этого необходимо сначала оценить погрешность $\left| r_t - r_t^{\Delta} \right|$. При некоторых технических предположениях (см. [Kloeden, Platen, 1995, 5.9.2, p. 208]) выполнена следующая оценка:

$$\mathbb{E}\left(\left| r_t - r_t^{\Delta} \right|^2 \middle| \mathcal{G}_{k-1} \right) \le E_k \Delta t_k, \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k). \tag{2.24}$$

В частности, оценка (2.24) верна, если у мгновенной ставки на всем отрезке существует конечный второй момент. Используя известное неравенство $1 - e^{-x} \le x,\ x \ge 0$, несложно проверить, что верна следующая оценка:

$$\left| e^{-x} - e^{-y} \right| \le e^{-\min(x,y)} \left| x - y \right| \le \left| x - y \right|, \quad \forall x, y \ge 0 \tag{2.25}$$

Используя (2.25) и неравенство Коши – Буняковского, получаем:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{B_{n-1}}{B_n} - \frac{B_{n-1}^{\Delta}}{B_n^{\Delta}} \right| = \left| e^{-\int_{t_{n-1}}^{t_n} r_u du} - e^{-\int_{t_{n-1}}^{t_n} r_u^{\Delta} du} \right| \le \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} (r_u - r_u^{\Delta}) du \right| \le \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| r_u - r_u^{\Delta} \right| du \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \left| \frac{B_{n-1}}{B_n} - \frac{B_{n-1}^{\Delta}}{B_n^{\Delta}} \right|^2 \le \int_{t_{n-1}}^{t_n} du \cdot \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| r_u - r_u^{\Delta} \right|^2 du = \Delta t_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| r_u - r_u^{\Delta} \right|^2 du \quad \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left(\left| \frac{B_{n-1}}{B_n} - \frac{B_{n-1}^{\Delta}}{B_n^{\Delta}} \right| \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) \le \sqrt{\mathbb{E}\left(\left| \frac{B_{n-1}}{B_n} - \frac{B_{n-1}^{\Delta}}{B_n^{\Delta}} \right|^2 \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right)} \le \\
&\qquad \le \sqrt{\Delta t_n} \sqrt{\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbb{E}\left(\left| r_u - r_u^{\Delta} \right|^2 \middle| \mathcal{G}_{n-1} \right) du} \le \sqrt{E_n} \Delta t_n.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

3) Используя оценку (2.26) и представление (2.21), оценим отклонение цены облигации от 1 в момент выплаты:

$$\left|P_{n-1}^z-1\right|\le\left|\mathbb{E}\left(\frac{B_{n-1}}{B_n}(1+r_{n-1}\Delta t_n)\middle|\mathcal{G}_{n-1}\right)-1\right|+\mathbb{E}\left(\frac{B_{n-1}}{B_n}\left|P_n^z-1\right|\middle|\mathcal{G}_{n-1}\right)\le$$

$$\le\left|(1+r_{n-1}\Delta t_n)\mathbb{E}\left(\frac{B_{n-1}}{B_n}-\frac{B_{n-1}^\Delta}{B_n^\Delta}\middle|\mathcal{G}_{n-1}\right)+\underbrace{(1+r_{n-1}\Delta t_n)\mathbb{E}\left(\frac{B_{n-1}^\Delta}{B_n^\Delta}\middle|\mathcal{G}_{n-1}\right)}_{=1}-1\right|+\mathbb{E}\left(\left|P_n^z-1\right|\middle|\mathcal{G}_{n-1}\right)\le$$

$$\le\mathbb{E}\left(\left|P_n^z-1\right|+(1+r_{n-1}\Delta t_n)\sqrt{E_n}\Delta t_n\middle|\mathcal{G}_{n-1}\right).\tag{2.27}$$

Зная, что $\left|P_N^z-1\right|=0$, по индукции несложно доказать, что

$$\left|P_n^z-1\right|\le\mathbb{E}\left(\sum_{i=n+1}^{N}(1+r_{i-1}\Delta t_i)\sqrt{E_i}\Delta t_i\middle|\mathcal{G}_n\right)=\eta_n.\tag{2.28}$$

4) Оценим разность $\left|P_t^z-1\right|$ для всех t на рассматриваемом отрезке времени, включая внутренние точки, где отклонение больше из-за НКД. Из (2.19) получаем:

$$P_t^z=B_t\mathbb{E}\left(\int_t^T B_u^{-1}dC_u+B_T^{-1}\middle|\mathcal{G}_t\right)=B_t\mathbb{E}\left(\int_t^{m^+(t)}B_u^{-1}dC_u+\int_{m^+(t)}^T B_u^{-1}dC_u+B_T^{-1}\middle|\mathcal{G}_t\right)=$$

$$=B_t\mathbb{E}\left(B_{m^+(t)}^{-1}r_{m^-(t)}\Delta t_{m^+(t)}\middle|\mathcal{G}_t\right)+B_t\mathbb{E}\left(B_{m^+(t)}^{-1}\underbrace{B_{m^+(t)}\mathbb{E}\left(\int_{m^+(t)}^T B_u^{-1}dC_u+B_T^{-1}\middle|\mathcal{G}_{m^+(t)}\right)}_{=P_{m^+(t)}^z}\middle|\mathcal{G}_t\right)=$$

$$=\mathbb{E}\left(\frac{B_t}{B_{m^+(t)}}(1+r_{m^-(t)}\Delta t_{m^+(t)})\middle|\mathcal{G}_t\right)+\mathbb{E}\left(\frac{B_t}{B_{m^+(t)}}(P_{m^+(t)}^z-1)\middle|\mathcal{G}_t\right).\tag{2.29}$$

Первое слагаемое отвечает за эффект от НКД, второе – за отличие предела, к которому стремится цена после выплаты, от единицы. Используя полученные ранее оценки (2.26), (2.28) и оценку остатка при разложении в ряд Тейлора

$$\mathbb{E}\left(\left|\frac{B_t^\Delta}{B_{m^+(t)}^\Delta}-1\right|\middle|\mathcal{G}_t\right)=\mathbb{E}(e^{-r_{m^-(t)}\Delta t_{m^+(t)}}-1|\mathcal{G}_t)\le r_{m^-(t)}\Delta t_{m^+(t)},\tag{2.30}$$

получаем требуемую оценку невязки:

$$
\mathbb{E}\left(\left|\frac{B_t}{B_{m^+(t)}}-1\right|\middle|\mathcal{G}_t\right)\le \mathbb{E}\left(\left|\frac{B_t}{B_{m^+(t)}}-\frac{B_t^{\Delta}}{B_{m^+(t)}^{\Delta}}\right|\middle|\mathcal{G}_t\right)+\mathbb{E}\left(\left|\frac{B_t^{\Delta}}{B_{m^+(t)}^{\Delta}}-1\right|\middle|\mathcal{G}_t\right)\le
$$

$$
\le \sqrt{E_{m^+(t)}}\Delta t_{m^+(t)}+\left|r_{m^-(t)}\right|\Delta t_{m^+(t)}=\left(\sqrt{E_{m^+(t)}}+r_{m^-(t)}\right)\Delta t_{m^+(t)}; \qquad (2.31)
$$

$$
\left|P_t^z-1\right|\le \mathbb{E}\left(\frac{B_t}{B_{m^+(t)}}r_{m^-(t)}\Delta t_{m^+(t)}\middle|\mathcal{G}_t\right)+\mathbb{E}\left(\left|\frac{B_t}{B_{m^+(t)}}-1\right|\middle|\mathcal{G}_t\right)+\mathbb{E}\left(\frac{B_t}{B_{m^+(t)}}\left|P_{m^+(t)}^z-1\right|\middle|\mathcal{G}_t\right)\le
$$

$$
\le r_{m^-(t)}\Delta t_{m^+(t)}+\left(\sqrt{E_{m^+(t)}}+r_{m^-(t)}\right)\Delta t_{m^+(t)}+\mathbb{E}\left(\eta_{m^+(t)}\middle|\mathcal{G}_t\right)=\xi_t. \qquad (2.32)
$$

Невязка ξ_t является $\mathcal{G}_{m^-(t)}$-измеримой случайной функцией, которая равномерно на $[0,T]$ сходится к нулю в среднеквадратическом, если $\sup\limits_{[0,T]}\mathbb{E}\left|r_t\right|^2<+\infty$.

Доказанная теорема позволяет оценить величину отклонения цены от единицы, при этом оценка задается в явном виде формулой (2.32). Из (2.29) можно также установить величину скачка цены в момент выплаты купона:

$$
P_{t_k-}^z=\mathbb{E}\left(\frac{B_{t_k-}}{B_{t_k}}(1+r_{t_{k-1}}\Delta t_{t_k})\middle|\mathcal{G}_{k-1}\right)+\mathbb{E}\left(\frac{B_{t_k-}}{B_{t_k}}(P_{t_k}^z-1)\middle|\mathcal{G}_k\right)=
$$

$$
=1+r_{t_{k-1}}\Delta t_{t_k}+\mathbb{E}\left(P_{t_k}^z\middle|\mathcal{G}_{k-1}\right)-1=r_{t_{k-1}}\Delta t_{t_k}+\mathbb{E}\left(P_{t_k}^z\middle|\mathcal{G}_{k-1}\right), \qquad (2.33)
$$

Поэтому ожидаемая величина скачка цены равна величине выплачиваемого купона: $\mathbb{E}\left(P_{t_k}^z-P_{t_k-}^z\middle|\mathcal{G}_{k-1}\right)=-r_{t_{k-1}}\Delta t_{t_k}$. На рис. 3 приведены графики цены облигации с дискретными выплатами, вычисленной по формуле (2.19) и соответствующей мгновенной ставки. Как видно, в моменты выплат цена близка к номинальной стоимости (равной 1), скачки цены увеличиваются с ростом ставки в начале соответствующего периода.

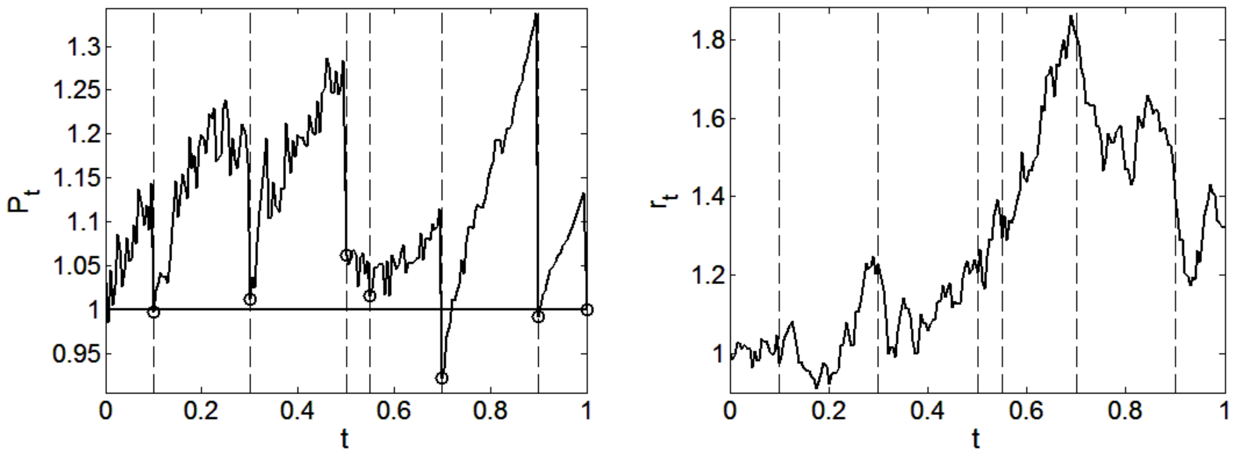


Рис. 3. Динамика цены облигации с дискретными купонными выплатами (слева) и соответствующая динамика процентной ставки согласно модели Кокса – Ингерсола – Росса (справа); пунктиром обозначены моменты выплат, на графике слева кругом обведены значения цены сразу после выплаты купона

Из приведенных рассуждений понятно, что стратегия, заключающаяся в занятии длинных позиций по CDS и дефолтной облигации, а также короткой – по безрисковой, не будет гарантировать безрисковую доходность, в какой бы момент $t' < T$ после дефолта мы ни закрывали бы позиции. После дефолта стоимость длинной позиции будет равна 1, в то время как короткой – P_t^z и может отличаться от единицы даже в моменты выплат купонов, тем более если купонные периоды достаточно велики. В результате обладатель рассматриваемого портфеля с положительной вероятностью не сможет продать портфель без убытков до конца купонного периода. В момент выплаты агент понесет дополнительный убыток в размере купона. В результате данная стратегия приводит к $X_t^\pi < 0$ с положительной вероятностью. Аналогичные рассуждения можно привести и в симметричном случае (относительно коротких/длинных позиций).

Закрытие позиции в момент T (известно, что $P_T^z = 1 \Rightarrow A_T = 0$) приведет к получению дохода только в том случае, если накопленные дивиденды больше нуля. Это позволяет привести аналог теоремы 3 для случая дискретных выплат. Действительно, пусть на рынке выполнено $A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z \equiv 0$ при $t < \tau$, т.е. до момента дефолта. Предположим, что $L < s$. Тогда, применяя стратегию $-\tilde{\pi}_t^\varepsilon$ из теоремы 3, а) для $\tau + \varepsilon = T$, получим, что покупка портфеля в начальный момент времени и продажа в конечный происходят по нулевой стоимости, т.е. стратегия будет самофинансируемой. При этом накопленные дивиденды от данной стратегии равны

$$\int_0^T \tilde{H}_u \underbrace{d(-\tilde{C}_u + S_u + C_u)}_{=(s-L)dN(u)>0} + \int_0^T H_u dC_u > 0, \tag{2.34}$$

где $N(t)$ – непрерывная справа ступенчатая функция, имеющая скачки величины 1 в моменты выплат купонов, т.е. счетчик выплаченных купонов до момента t. Таким образом, положительные дивиденды обеспечивают положительную стоимость портфеля в момент T с вероятностью 1, что означает наличие на рынке арбитражных возможностей. Следовательно, из $A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z \equiv 0$ при $t < \tau$ необходимо следует $L \geq s$.

Пусть на рынке выполнено $L = s$. Предположим, что существует момент $t^* < \tau$ такой, что $A_{t^*} > 0$. Тогда, применяя стратегию $-\tilde{\pi}_t^\varepsilon$ из теоремы 3, б) для $\tau + \varepsilon = T$ (см. формулу (2.10)), получим аналогичный результат, т.е. наличие арбитражных возможностей. Следовательно, из $L = s$ необходимо следует $A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z \leq 0$ при $t < \tau$. Таким образом, доказан следующий результат:

Теорема 5: *пусть* $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = T$ *– моменты купонных выплат по безрисковой облигации на плавающую ставку,* $\tau \in \mathbb{R}_+$ *– момент дефолта. Тогда на безарбитражном рынке плавающих процентных ставок*

а) из равенства (2.4) следует соотношение между премиями $L \geq s$*;*

б) из равенства $L = s$ *и непрерывности процесса* $A_t = P_t^r + P_t^{CDS} - P_t^z$ *до момента дефолта следует*

$$P_t^r + P_t^{CDS} \leq P_t^z \quad \forall t < \tau. \tag{2.35}$$

Замечание 1: Еще раз подчеркнем, что теорема 6 доказывает лишь соотношения в виде неравенств, так как в противном случае не занимается короткая позиция по безрисковой облигации, что приводит к положительной конечной стоимости портфеля и арбитражу. При выполнении неравенств короткая позиция занимается и гарантированный арбитраж с использованием *рассмотренных* стратегий невозможен.

2.3 Арбитражные возможности на рынке фиксированных ставок

Случай фиксированных ставок можно свести в определенном смысле к рассмотренному случаю дискретных выплат, независимо от того, имеем ли мы дискретное начисление или непрерывное. В любом случае можно показать, что для фиксированных ставок верны утверждения теоремы 6.

Пусть безрисковая облигация имеет детерминированный кумулятивный купон $C(t)$, причем скорость начисления купона не совпадает со скоростью для плавающей ставки. При непрерывном начислении, например, это означает, что $C'(t) = c(t) \neq r_t$. Тогда, используя формулу для цены (1.8), а также утверждение теоремы 2, получаем, что

$$\begin{aligned} P_t^z &= B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} dC(u) + B_T^{-1} \middle| \mathcal{G}_t\right) = \\ &= \underbrace{B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} r_u du + B_T^{-1} \middle| \mathcal{G}_t\right)}_{=1} + \underbrace{B_t \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1}\left(dC(u) - r_u du\right) \middle| \mathcal{G}_t\right)}_{=\eta_t} = \\ &= 1 + \eta_t, \end{aligned} \tag{2.36}$$

То есть во все моменты времени, кроме конечного, цена безрисковой облигации отличается от единицы, как и в случае с дискретным начислением. Поэтому все предпосылки теоремы 6 верны.

3 Фундаментальное уравнение в частных производных временной структуры цен инструментов на рынке кредитных свопов и облигаций

Рассмотрим динамику цен кредитных свопов и облигаций со сроком погашения T при $t < \tau \wedge T$ при некоторых дополнительных предположениях, чтобы получить уравнение для рассматриваемого рынка, аналогичное классическому фундаментальному уравнению для бескупонных облигаций. Будем считать, что все купоны начисляются непрерывно с постоянной скоростью. Номинал положим равным единице. Предположим также, что динамика мгновенной ставки и интенсивности дефолта описывается диффузионными процессами Ито:

$$dr_t = \mu^r(t)dt + \sigma^r(t)dw_t^r, \tag{3.1}$$

$$d\gamma_t = \mu^\gamma(t)dt + \sigma^\gamma(t)dw_t^\gamma, \tag{3.2}$$

Для упрощения записи зависимость от времени и других аргументов будет опускаться там, где это понятно. По изначальному предположению процессы w_t^r и w_t^γ независимы. Обозначим

$$
\begin{aligned}
&\mu^r + \mu^\gamma = \tilde{\mu}, \\
&\left(\sigma^r\right)^2 + \left(\sigma^\gamma\right)^2 = \tilde{\sigma}^2.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

Для инструмента $DCT(F, f_t, \tilde{Z}, \tau)$, подверженного дефолту, имеем, согласно (1.10),

$$
\begin{aligned}
P_t &= B_t e^{\Gamma_t} \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T B_u^{-1} f e^{-\Gamma_u} du + \int_t^T B_u^{-1} \tilde{Z} e^{-\Gamma_u} \gamma_u du + B_T^{-1} F e^{-\Gamma_T} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \\
&= f \cdot \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T \tilde{B}_t \tilde{B}_u^{-1} du \middle| \mathcal{F}_t \right) + \tilde{Z} \cdot \mathbb{E}_{Q^*}\left(\int_t^T \tilde{B}_t \tilde{B}_u^{-1} \gamma_u du \middle| \mathcal{F}_t \right) + F \cdot \mathbb{E}_{Q^*}\left(\tilde{B}_t \tilde{B}_T^{-1} \middle| \mathcal{F}_t \right) = \\
&= f P_1(t, r_t, \gamma_t) + \tilde{Z} P_2(t, r_t, \gamma_t) + F P_3(t, r_t, \gamma_t),
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

где $\tilde{B}_t = B_t e^{-\Gamma_t} = e^{-\int_0^t (r_u + \gamma_u) du}$. Функции P_1, P_2, P_3 зависят в момент t только от значений процессов r_t, γ_t в момент t в силу марковости. Несложно заметить, что все функции зависят от $r_t + \gamma_t$ и могут быть представлены в виде

$$
\begin{aligned}
&P_1(t, r, \gamma) = S(t, \xi, \gamma), \\
&P_1(t, r, \gamma) = S_1(t, \xi), \\
&P_2(t, r, \gamma) = S_2(t, \xi, \gamma), \\
&P_3(t, r, \gamma) = S_3(t, \xi), \\
&\xi = r + \gamma,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где $S_1(t, \xi)$ – цена инструмента, по которому начисляется купон с постоянной скоростью 1 при банковской ставке ξ, $S_2(t, \xi)$ – цена инструмента, по которому происходит единственный платеж величины 1 в момент дефолта при банковской ставке ξ, $S_3(t, \xi)$ – цена бескупонной облигации номиналом 1 при банковской ставке ξ. Предположим, что $P, P_1, P_2, P_3, S, S_1, S_2, S_3$ непрерывно-дифференцируемы по t и дважды непрерывно-дифференцируемы по остальным аргументам. Несложно видеть, что

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial P_i}{\partial t} = \frac{\partial S_i}{\partial t},\\
&\frac{\partial P_i}{\partial r} = \frac{\partial S_i}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial^2 P_i}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 S_i}{\partial \xi^2},\\
&\frac{\partial P_{1,3}}{\partial \gamma} = \frac{\partial S_{1,3}}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial^2 P_{1,3}}{\partial \gamma^2} = \frac{\partial^2 S_{1,3}}{\partial \gamma^2},\\
&\frac{\partial P_2}{\partial \gamma} = \frac{\partial S_2}{\partial \xi} + \frac{\partial S_2}{\partial \gamma}, \quad \frac{\partial^2 P_2}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 S_2}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 S_2}{\partial \xi \partial \gamma} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial \gamma^2}.
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Тогда получаем следующие выражения для дифференциалов цен по формуле Ито:

$$
\begin{aligned}
dP_{1,3} &= \frac{\partial P_{1,3}}{\partial t}dt + \frac{\partial P_{1,3}}{\partial r}dr + \frac{\partial P_{1,3}}{\partial \gamma}d\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_{1,3}}{\partial r^2}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_{1,3}}{\partial \gamma^2}dt =\\
&= \left(\frac{\partial S_{1,3}}{\partial t} + \frac{\partial S_{1,3}}{\partial \xi}\tilde{\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_{1,3}}{\partial \xi^2}\tilde{\sigma}^2\right)dt + \frac{\partial S_{1,3}}{\partial \xi}\sigma^r dw_t^r + \frac{\partial S_{1,3}}{\partial \xi}\sigma^\gamma dw_t^\gamma,
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

$$
\begin{aligned}
dP_2 = &\left(\frac{\partial S_2}{\partial t} + \frac{\partial S_2}{\partial \xi}\tilde{\mu} + \frac{\partial S_2}{\partial \gamma}\mu^\gamma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_2}{\partial \xi^2}\tilde{\sigma}^2 + \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial^2 S_2}{\partial \xi \partial \gamma} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial \gamma^2}\right)\sigma^{\gamma^2}\right)dt +\\
&+ \frac{\partial S_2}{\partial \xi}\sigma^r dw_t^r + \left(\frac{\partial S_2}{\partial \xi} + \frac{\partial S_2}{\partial \gamma}\right)\sigma^\gamma dw_t^\gamma.
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Складывая формулы с весами согласно (3.4), получаем дифференциал для цены дефолтного актива:

$$
\begin{aligned}
dS = &\left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \xi}\tilde{\mu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial \xi^2}\tilde{\sigma}^2 + \tilde{Z}\frac{\partial S_2}{\partial \gamma}\mu^\gamma + \frac{1}{2}\left(2\tilde{Z}\frac{\partial^2 S_2}{\partial \xi \partial \gamma} + \tilde{Z}\frac{\partial^2 S_2}{\partial \gamma^2}\right)\sigma^{\gamma^2}\right)dt +\\
&+ \frac{\partial S}{\partial \xi}\sigma^r dw_t^r + \left(\frac{\partial S}{\partial \xi} + \tilde{Z}\frac{\partial S_2}{\partial \gamma}\right)\sigma^\gamma dw_t^\gamma = \alpha S dt + \beta S dw_t^r + \zeta S dw_t^\gamma.
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Дифференциал для дефолтной облигации получается при подстановке $f = \tilde{c}, \tilde{Z} = R, F = 1$, для свопа – при $f = -s, \tilde{Z} = 1 - R, F = 0$. Для безрисковой облигации при аналогичных предположениях получаем

$$
P^z = c \cdot Z_1(t, r_t) + N \cdot Z_3(t, r_t) = Z(t, r), \tag{3.10}
$$

$$dZ = \left(\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial Z}{\partial r}\mu^r + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Z}{\partial r^2}\sigma^{r^2} \right)dt + \frac{\partial Z}{\partial r}\sigma^r dw_t^r = \tag{3.11}$$
$$= \alpha^z Z dt + \beta^z Z dw_t^r.$$

При этом уравнение (3.11) остается верным не только для постоянной скорости начисления. Таким образом, имеем следующие уравнения динамики цен и накопленных дивидендов в общем виде:

$$\begin{aligned}
dS^r &= \alpha^r S^r dt + \beta^r S^r dw_t^r + \zeta^r S^r dw_t^\gamma, \\
dS^{CDS} &= \alpha^{CDS} S^{CDS} dt + \beta^{CDS} S^{CDS} dw_t^r + \zeta^{CDS} S^{CDS} dw_t^\gamma, \\
dZ &= \alpha^z Z dt + \beta^z Z dw_t^r, \\
dD^r &= \delta^r S^r dt, \quad \delta^r = \frac{\tilde{c}}{S^r}, \\
dD^{CDS} &= \delta^{CDS} S^{CDS} dt, \quad \delta^{CDS} = -\frac{s}{S^{CDS}}, \\
dD^z &= \delta^z Z dt, \quad \delta^z = \frac{c}{Z}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Как и при выводе классического фундаментального уравнения, рассмотрим портфель X_t, состоящий из свопа и двух видов облигаций, соответствующий самофинансируемой стратегии π_t. В дальнейшем будет удобнее оперировать эквивалентными относительными стратегиями

$$(u, v, w) = \left(\frac{\pi^r S^r}{X}, \frac{\pi^{CDS} S^{CDS}}{X}, \frac{\pi^z Z}{X} \right), \tag{3.13}$$

$$u + v + w = 1. \tag{3.14}$$

Тогда, в силу самофинансируемости,

$$dX = \pi^r (dS^r + dD^r) + \pi^{CDS}(dS^{CDS} + dD^{CDS}) + \pi^z (dZ + dD^z) =$$
$$= Xu\left(\frac{dS^r}{S^r} + \frac{dD^r}{S^r} \right) + Xv\left(\frac{dS^{CDS}}{S^{CDS}} + \frac{dD^{CDS}}{S^{CDS}} \right) + Xw\left(\frac{dZ}{Z} + \frac{dD^z}{Z} \right) =$$
$$= X\left[u(\alpha^r + \delta^r) + v(\alpha^{CDS} + \delta^{CDS}) + w(\alpha^z + \delta^z) \right]dt +$$

$$+X\left[u\beta^{r}+v\beta^{CDS}+w\beta^{z}\right]dw_t^r+X\left[u\zeta^{r}+v\zeta^{r}\right]dw_t^{\gamma}. \quad (3.15)$$

Из условия отсутствия арбитража следует, что безрисковая стратегия должна иметь доходность, равную доходности банковского счета. Поэтому сначала найдем все безарбитражные стратегии:

$$\begin{cases} u+v+w=1, \\ u\beta^{r}+v\beta^{CDS}+w\beta^{z}=0, \\ u\zeta^{r}+v\zeta^{r}=0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} u=\dfrac{\beta^{z}\zeta^{CDS}}{\zeta^{r}(\beta^{CDS}-\beta^{z})-\zeta^{CDS}(\beta^{r}-\beta^{z})}, \\ v=\dfrac{-\beta^{z}\zeta^{r}}{\zeta^{r}(\beta^{CDS}-\beta^{z})-\zeta^{CDS}(\beta^{r}-\beta^{z})}, \\ w=\dfrac{\beta^{CDS}\zeta^{r}-\beta^{r}\zeta^{CDS}}{\zeta^{r}(\beta^{CDS}-\beta^{z})-\zeta^{CDS}(\beta^{r}-\beta^{z})}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Для полученной стратегии условие равенства доходностей с учетом (3.14), (3.15) принимает вид

$$\begin{gathered} u(\alpha^{r}+\delta^{r})+v(\alpha^{CDS}+\delta^{CDS})+w(\alpha^{z}+\delta^{z})=r(u+v+w) \\ \Leftrightarrow \\ u(\alpha^{r}+\delta^{r}-r)+v(\alpha^{CDS}+\delta^{CDS}-r)+w(\alpha^{z}+\delta^{z}-r)=0 \\ \Leftrightarrow \\ \beta^{z}\zeta^{CDS}(\alpha^{r}+\delta^{r}-r)-\beta^{z}\zeta^{r}(\alpha^{CDS}+\delta^{CDS}-r)+ \\ +(\beta^{CDS}\zeta^{r}-\beta^{r}\zeta^{CDS})(\alpha^{z}+\delta^{z}-r)=0 \end{gathered} \quad (3.18)$$

Уравнение (3.18) перепишем в более удобном виде:

$$\beta^{z}\frac{\alpha^{r}+\delta^{r}-r}{\zeta^{r}}-\beta^{z}\frac{\alpha^{CDS}+\delta^{CDS}-r}{\zeta^{CDS}}+\left(\frac{\beta^{CDS}}{\zeta^{CDS}}-\frac{\beta^{r}}{\zeta^{r}}\right)(\alpha^{z}+\delta^{z}-r)=0. \quad (3.19)$$

Лемма 2: для безрисковой облигации справедливо тождество

$$\alpha^z + \delta^z \equiv r. \tag{3.20}$$

Доказательство: известно, что дисконтированная цена облигации $\dfrac{P_t}{B_t}$ является мартингалом. Опишем динамику дисконтированной цены двумя способами, используя представления (1.23) и (3.11):

$$dB_t^{-1} = -r_t B_t^{-1} dt, \tag{3.21}$$

$$d\left(B_t^{-1} P_t\right) = B_t^{-1} dP_t - P_t r_t B_t^{-1} dt \quad \Rightarrow \tag{3.22}$$

$$\begin{cases} d\left(B_t^{-1} P_t\right) = \left(B_t^{-1} r_t P_t - B_t^{-1} c_t - P_t r_t B_t^{-1}\right) dt + B_t^{-1} B_t d\tilde{m}_t^z, \\ d\left(B_t^{-1} P_t\right) = \left(B_t^{-1} \alpha_t^z P_t - P_t r_t B_t^{-1}\right) dt + B_t^{-1} \beta_t^z P_t dw_t^r, \end{cases} \tag{3.23}$$

В силу единственности разложения Дуба – Мейера для субмартингалов выражения при соответствующих дифференциалах можно приравнять. Получаем следующие соотношения:

$$\begin{cases} - B_t^{-1} c_t = B_t^{-1} \alpha_t^z P_t - P_t r_t B_t^{-1}, \\ d\tilde{m}_t^z = B_t^{-1} \beta_t^z P_t dw_t^r, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_t^z - r_t = -\dfrac{c_t}{P_t} = \delta_t^z, \\ d\tilde{m}_t^z = B_t^{-1} \dfrac{\partial Z}{\partial r} \sigma^r(t) dw_t^r, \end{cases} \quad \square \tag{3.24}$$

Используя утверждение леммы 2, получаем *фундаментальное уравнение* для рассматриваемого рынка:

$$\frac{\alpha^r + \delta^r - r}{\zeta^r} = \frac{\alpha^{CDS} + \delta^{CDS} - r}{\zeta^{CDS}} = \lambda \tag{3.25}$$

Выражение (3.25) похоже на уравнение для рыночной цены риска (market price of risk) (см., например, [Björk, 2004, p. 321]). Полученная величина λ может интерпретироваться похожим образом, так как является инвариантой для всех дефолтных инструментов рынка (в данном случае их всего два). Согласно (3.12), $\alpha+\delta$ имеет смысл мгновенной ставки доходности инструмента (local rate of return), а $\alpha+\delta-r$ интерпретируется как премия за риск (risk premium); ζ имеет значение мгновенной волатильности инструмента, связанной только с риском дефолта, но не рыночным. Значит, λ может быть проинтерпретирована скорее как рыночная цена риска дефолта. Напомним, что уравнение (3.25) было получено в предположении, что скорость начисления купонных выплат по всем инструментам постоянна.

Замечание 1: для рынка, на котором торгуются инструменты с любым временем до погашения T, легко показать, что λ не зависит от T. Действительно, рассмотрим портфель из безрисковой облигации, дефолтной облигации с датой погашения T и дефолтной облигации с датой погашения T'. Проведем аналогичные рассуждения (выкладки совершенно не изменятся) и получим (3.25) с той лишь разницей, что на месте характеристик динамики CDS будут характеристики облигации со сроком T'. Значит, λ не зависит от срока до погашения. Этим же свойством обладает и рыночная цена риска, что делает их аналогию еще более явной.

4 Заключение

В первой части работы была описана модель рассматриваемого рынка и общий подход к моделированию кредитного риска на основе моделей сокращенной формы. Во второй части были получены условия, позволяющие говорить об определенных соотношениях между премией за кредитный риск облигации и соответствующей CDS-премией. В частности, доказано, что при определенных условиях и непрерывном начислении купонов на плавающую ставку равенство премий равносильно тому, что до момента дефолта цена безрисковой облигации равна суммарной стоимости дефолтной облигации и CDS. При дискретном начислении или фиксированных купонах схожие рассуждения дают менее строгие соотношения между премиями и ценами в виде неравенств.

В результате исследования было установлено, что в некоторых случаях даже при одинаковом отражении информации о дефолте в котировках свопов и облигаций цены инструментов, возможно, не удовлетворяют естественному соотношению (2.4), которое говорит о том, что портфель из CDS и рисковой облигации реплицирует безрисковую облигацию. Показано, что необходимым является выполнение более мягких соотношений. Необходимость (2.4) не может быть получена из существования интуитивно-понятной арбитражной стратегии и остается нерешенной проблемой, открытой для дальнейших исследований. Аналогичные выводы можно сделать и о соотношении между премиями, если портфель из CDS и рисковой облигации реплицирует безрисковую облигацию. Равенство выполнено в случае непрерывного начисления с плавающим купоном, в остальных случаях доказано лишь нестрогое неравенство.

В третьей части работы было получено фундаментальное уравнение для рассматриваемого рынка. Основным результатом является получение инварианты, которая характеризует отношение рынка к кредитному риску и может быть проинтерпретирована как рыночная цена риска дефолта. Данная величина, наравне с премиями за риск, отражает представления о дефолте, но является одинаковой для обоих безрисковых инструментов, следовательно, является характеристикой самого рынка. В то же время премия за риск зависит также от характеристик конкретного инструмента.

Литература

1. Bielecki T., Rutkowski M. Credit risk: modeling, valuation and hedging. Berlin: Springer, 2002.

2. Björk T. Arbitrage Theory in Continuous Time. OUP Oxford, 2004. Issue 2.

3. Brigo D., Alfonsi A. Credit default swap calibration and derivatives pricing with the SSRD stochastic intensity model // Finance and Stochastics. 2005. No. 9. P. 29–42.

4. Calice G., Chen J., Williams J. Liquidity spillovers in sovereign bond and CDS markets: An analysis of the Eurozone sovereign debt crisis // Journal of Economic Behavior & Organization. 2011.

5. Duffie D. Credit swap valuation // Financial Analysts Journal. 1999. No. 55. P. 73–87.

6. Duffie D., Singleton K.J. Modeling Term Structures of Defaultable Bonds // The Review of Financial Studies. 1999. No. 12. P. 687–720.

7. Houweling P., Vorst T. Pricing default swaps: Empirical evidence // Journal of International Money and Finance. 2005. No. 24. P. 1200–1225.

8. Hull J., White A. Valuing Credit Default Swaps I: No Counterparty Default Risk // 2000. No. 8615. P. 1–35.

9. Lando D. On Cox processes and credit risky securities // Review of Derivatives research. 1998. P. 99–120.

10. Longstaff F., Schwartz E. A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt // The Journal of Finance. 2012. No. 50. P. 789–819.

11. Longstaff F.A., Mithal S., Neis E. Corporate Yield Spreads : Default Risk or Liquidity ? New Evidence from the Credit Default Swap Market // The Journal of Finance. 2005. No. 60. P. 2213–2253.

12. Peter E. Kloeden, Platen E. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. N. Y.: Springer, 1995. Issue 2.

13. Protter P. Stochastic Integration and Differential Equations. Berlin: Springer, 2004. Issue 2.

14. Жакод Ж., Ширяев А.Н. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994.

15. Ширяев А. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998.

Andreev, N., Kurbangaleev, M., Lapshin, V. Arbitrage Opportunities in Credit Default Swap and Bond Markets : Working paper WP16/2012/04 [Text] / N. Andreev, M. Kurbangaleev, V. Lapshin ; National Research University "Higher School of Economics". – Moscow : Publishing House of the Higher School of Economics, 2012. – 38 p. (in Russian).

The study was implemented in the framework of the Basic Research Program at the National Research University Higher School of Economics (HSE) in 2012. This paper studies conditions which affect the relation between credit risk components of defaultable bonds and credit default swaps prices. In a simplifi ed model of arbitrage-free market we derived the necessary conditions for the equivalence of bond credit risk premium and CDS spread. It is also shown, under which conditions a default-free bond may be correctly replicated with a CDS and a reference defaultable bond. Finally, within our model we obtained the analogue of market price of risk which is invariant for the entire class of considered instruments and might be seen as an indicator of market perception of entity's credit quality.

Keywords: arbitrage opportunities, credit risk premium, credit default swaps, default intensity, market price of risk.

Nikolay Andreev – junior researcher, Financial Engineering and Risk-Management Laboratory, National Research University Higher School of Economics.

Marat Kurbangaleev – junior researcher, Financial Engineering and Risk-Management Laboratory, National Research University Higher School of Economics.

Victor Lapshin – associate professor, Department of Finance, researcher, Financial Engineering and Risk-Management Laboratory, National Research University Higher School of Economics; Moscow State University.

Препринт WP16/2012/04
Серия WP16
Финансовая инженерия,
риск-менеджмент и актуарная наука

Андреев Николай Анатольевич, Курбангалеев Марат Зуфарович,
Лапшин Виктор Александрович

Арбитражные возможности на рынках кредитных дефолтных свопов и облигаций